بسم اللہ الرحمن الرحیم

امثلہ باب اول

۳۵ = ۴ − ۳۰ + ۹ (۲) ۲۳ = ۱۶ + ۶ + ۱ (۱)

۸۸ = ۱۲ − ۹۶ + ۴ (۴) ۶۳ = ۳۶ + ۲۴ + ۳ (۳)

۲۶ = ۰ + ۱۶ + ۹ + ۱ (۶) ۹۲ = ۰ + ۸ + ۷۲ + ۱۲ (۵)

۶ = ۶ − ۱۲ + ۲۵۶ − ۲۵۶ (۸) ۱۵ = ۱ − ۸ + ۸ = ۲۴/۲۴ − ۲۴/۳ + ۲۴/۳ (۷)

۲ = ۱۵۲/۷۶ = − (۴۳ − ۲۱۶)/(۱۶ + ۲۴ + ۳۶) (۱۰) ۵ = ۲۵/۵ = (۱۶ + ۹)/(۳ − ۸) (۹)

۱۰ = ۲۶ + ۴ = √۸^۳ − √۲۱۶^۳ + √۳۶ (۱۲) ۹ = ۲ + ۲ − ۹ = −√۴ + √۸^۳ − √۸۱ (۱۱)

۱۱۲ − ۱۲ × ۸ + ۴ × ۴ = ۱۱۲ − (۷ + ۵)(۵ + ۳) + (۱ + ۳)(۵ − ۹) (۱۳)

۰ = ۱۱۲ − ۹۶ + ۱۶ =

۲۶ = ۲۱ + ۵ = ۷ × ۳ + ۱ × ۵ = √۴۹ ۳ + √۱ × ۵ = √(۲۴ + ۲۵) ۳ + √(۲۴ − ۲۵) × ۵ (۱۴)

۴۳ = ۳۵ + ۸ = √۴۹ × ۵ + √۱ ۸ = √(۲۴ + ۲۵) ۵ + √(۲۴ − ۲۵) × ۵ (۱۵)

۳۸ = ۲ × ۲ − ۴ × ۸ + ۱۰ = √۸^۳ × ۲ − √۱۶ ۸ + ۱۰ = √(۴ − ۱۲)^۳ (۸ − ۱۰) − √(۴ + ۱۲) ۸ + ۱۰ (۱۶)

= √(۶ × ۶) + (۱۰ + ۴) ۵ = √((۱ + ۵)(۱۰ − ۱۶)) + (√(۱۰ + ۱۶))(۵ − ۱۰) (۱۷)

۵۲۶ = ۱ + ۵۲۵ = √[(۱ + ۱۰)(۵ − ۱۶)] + [۲۵ + √۱۰۰](۱ − ۱۶) اور ۷۶ = ۶ + ۱۴ × ۵ =

√(۲ × ۲(۳ − ۵))^۳ + √((۲ × ۲ − ۵)(۶ + ۲)) + √(۵ × ۲(۳ + ۲))^۳ (۱۸)

۹ = ۲ + ۲ + ۵ = √(۲ × ۲(۲))^۳ + √۸^۳ + √(۵ × ۲(۵))^۳ =

باب دوم

لب۲ + ف۵۲ + ل۲ + ب۵۲ = لب۲ + ل۵۲ + ب۵۲ − ل۳ + ل − ب۵۴ (۵)

(۳۰)

ا + لا

ب + لا

ب ا + ب لا

ا لا + لا^{2}

ب ا + (ب + ا) لا + لا^{2}

ج + لا

ج ب ا + ج (ب + ا) لا + ج لا^{2}

\+ ب ا لا + (ب + ا) لا^{2} + لا^{3}

ج ب ا + (ج ب + ج ا + ب ا) لا + (ا + ب + ج) لا^{2} + لا^{3}

(۳۱)

لا − ا

لا − ب

لا^{2} − ا لا

− ب لا + ا ب

لا^{2} − (ا + ب) لا + ا ب

لا − ج

لا^{3} − (ا + ب) لا^{2} + ا ب لا

− ج لا^{2} + (ا + ب) ج لا − ا ج ب

لا^{3} − (ا + ب + ج) لا^{2} + (ا ب + ا ج + ب ج) لا − ا ج ب

لا − د

لا^{4} − (ا + ب + ج) لا^{3} + (ا ب + ا ج + ب ج) لا^{2} − ا ج ب لا

− د لا^{3} + (ا + ب + ج) د لا^{2} − (ا ب + ا ج + ب ج) د لا + ا ج ب د

لا^{4} − (ا + ب + ج + د) لا^{3} + (ا ب + ا ج + ب ج + ا د + ب د + ج د) لا^{2} − (ا ب د + ا ج د + ب ج د + ا ج ب) لا + ا د ج ب

(۳۲) پہلے ہم اول اور دوم اجزاء ضربی کو ضرب دیتے ہیں اور پھر سوم و چہارم اجزاء ضربی کو اور پھر جو دونو حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں انکو ضرب دیتے ہیں اور دفعہ ۵۶ کی ترکیب کو عمل میں لاتے ہیں

(ا + ب − ج) (ا + ج − ب) = (ا − (ج − ب)) (ا + (ج − ب))

= ا^۲ - (ح - ب)^۲ = ا^۲ - ح^۲ - ب^۲ + ۲ ح ب

(ب + ح - ا)(ا + ب + ح) = (ب + ح)^۲ - ا^۲

= ب^۲ + ح^۲ + ۲ ب ح - ا^۲

(ب^۲ + ح^۲ + ۲ ب ح - ا^۲) × (ا^۲ - ح^۲ - ب^۲ + ۲ ح ب)

= [(۲ ب ح + ب^۲ + ح^۲ - ا^۲)] [(۲ ب ح - (ب^۲ + ح^۲ - ا^۲))]

= ۴ ب^۲ ح^۲ - [ب^۲ + ح^۲ - ا^۲]^۲

= ۴ ب^۲ ح^۲ - [ب^۴ + ۲ ب^۲ ح^۲ - ۲ ا^۲ ب^۲ + ح^۴ - ۲ ح^۲ ا^۲ + ا^۴]

= ۲ ب^۲ ح^۲ + ۲ ح^۲ ا^۲ + ۲ ا^۲ ب^۲ - ب^۴ - ح^۴ - ا^۴

(۳۳) (ا + ب)(ب + ح) = ا ب + ا ح + ب^۲ + ب ح

(ح + د)(د + ا) = ح د + ا ح + د^۲ + د ا

(ا + ح)(ب - د) = ا ب - ا د + ب ح - ح د

پس ا ب + ح ا + ب^۲ + ب ح - (ح د + ا ح + د^۲ + د ا) - (ا ب - ا د + ب ح - ح د)

= ا ب + ح ا + ب^۲ + ب ح - ح د - ا ح - د^۲ - د ا - ا ب + ا د - ب ح + ح د

= ب^۲ - د^۲

(۳۴) (ا + ب + ح + د)^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + د^۲ + ۲ ا ب + ۲ ا ح + ۲ ا د + ۲ ب ح + ۲ ب د + ۲ ح د

(ا - ب - ح + د)^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + د^۲ - ۲ ا ب - ۲ ا ح + ۲ ا د + ۲ ب ح - ۲ ب د - ۲ ح د

(ا - ب + ح - د)^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + د^۲ - ۲ ا ب + ۲ ا ح - ۲ ا د - ۲ ب ح + ۲ ب د - ۲ ح د

(ا + ب - ح - د)^۲ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + د^۲ + ۲ ا ب - ۲ ا ح - ۲ ا د - ۲ ب ح - ۲ ب د + ۲ ح د

حاصل جمع ، = ۴(ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + د^۲).

(۳۵) بموجب فقرہ ۵۵ (لا + ر + ی)^۳ = لا^۳ + ر^۳ + ی^۳ + ۳ لا^۲(ر + ی) + ۳ ر^۲(لا + ی) + ۳ ی^۲(لا +

∴ (لا + ر + ی)^۳ - لا^۳ - ر^۳ - ی^۳ = ۳ لا^۲(ر + ی) + ۳ ر^۲(لا + ی) + ۳ ی^۲(لا + ر) + ۶ لا ر ی

۳(ر + ی)(ی + لا)(لا + ر) = ۳(ر ی + ر لا + ی^۲ + ی لا)(لا + ر) = ۳(۲ لا ر ی) + لا^۲ ر + لا ی^۲ +

= لا^{۸} + ی^{۸} + (لا^{۲} + ۲لای + ی^{۲})^{۴} = لا^{۸} + ی^{۸} + (لا^{۴} + ۴لا^{۳}ی + ۶لا^{۲}ی^{۲} + ۴لای^{۳} + ی^{۴})^{۲}

= لا^{۸} + ی^{۸} + لا^{۸} + ۸لا^{۷}ی + ۲۸لا^{۶}ی^{۲} + ۵۶لا^{۵}ی^{۳} + ۷۰لا^{۴}ی^{۴} + ۵۶لا^{۳}ی^{۵} + ۲۸لا^{۲}ی^{۶} + ۸لای^{۷} + ی^{۸}

= ۲(لا^{۸} + ۴لا^{۷}ی + ۱۴لا^{۶}ی^{۲} + ۲۸لا^{۵}ی^{۳} + ۳۵لا^{۴}ی^{۴} + ۲۸لا^{۳}ی^{۵} + ۱۴لا^{۲}ی^{۶} + ۴لای^{۷} + ی^{۸})

پس دعوی ثابت ہوا

(۴۱) (لا^{۲} + لای + ی^{۲})^{۲} − (لا^{۲} − لای + ی^{۲})^{۲} = (۲لا^{۲} + ۲ی^{۲})(۲لای) = ۴لای(لا^{۲} + ی^{۲})

(۴۲) (لا^{۲} + لای − ی^{۲})^{۲} − (لا^{۲} − لای − ی^{۲})^{۲} = ۲(لا^{۲} − ی^{۲})(۲لای) = ۴لای(لا^{۲} − ی^{۲})

(۴۳) (لا^{۲} − ۳لا + ۲)^{۲}(لا^{۲} + ۶لا + ۱) = (لا^{۴} − ۶لا^{۳} + ۱۳لا^{۲} − ۱۲لا + ۴)(لا^{۲} + ۶لا + ۱)

= لا^{۶} − ۲۲لا^{۴} + ۶۰لا^{۳} − ۵۵لا^{۲} + ۱۲لا + ۴

(۴۴) لا^{۶} + ا^{۶} − ا^{۲}لا^{۲}(لا^{۲} + ا^{۲}) = لا^{۶} − ا^{۲}لا^{۴} − ا^{۴}لا^{۲} + ا^{۶} اور دوسرا جملہ = لا^{۴} − الا^{۳} − ا^{۳}لا + لا^{۲}

پس ان دونو جملون کو اپنمین ضرب دو تو جواب حاصل ہوجایگا

(۴۵) (ا + ب)^{۲} = ا^{۲} + ۲اب + ب^{۲} اور (ا − ب)^{۳} = ا^{۳} − ۳ا^{۲}ب + ۳اب^{۲} − ب^{۳}

(ا^{۲} + ۲اب + ب^{۲})(ا^{۳} − ۳ا^{۲}ب + ۳اب^{۲} − ب^{۳}) = جواب

(۴۶) ص(ص − ۲ب)(ص − ۲ح) = ص^{۳} − ۲ص^{۲}(ب + ح) + ۴بحص

ص(ص − ۲ح)(ص − ۲ا) = ص^{۳} − ۲ص^{۲}(ح + ا) + ۴احص

ص(ص − ۲ا)(ص − ۲ب) = ص^{۳} − ۲ص^{۲}(ا + ب) + ۴ابص

حاصل جمع = ۳ص^{۳} − ۴ص^{۲}(ا + ب + ح) + ۴ص(اب + اح + بح)

یعنی ۳ص^{۳} − ۴ص^{۳} + ۴ص(اب + اح + بح)

یعنی − ص^{۳} + ۴ص(اب + اح + بح) اب دوسری جملہ پر عمل کرو تو

(ص − ۲ا)(ص − ۲ب)(ص − ۲ح) = ص^{۳} − ۲(ا + ب + ح)ص^{۲} + ۴ص(بح + اح + اب) − ۸ابح ۱۸

یعنی − ص^{۳} + ۴ص(اب + اح + بح)

باب چہارم

(۳۸) مقسوم = لا^۲ (ا - لا) - ب^۲ (ا - لا) = (ا - لا) (لا + ب) (لا - ب)

اسلئی خارج قسمت لا - ب ہی

(۳۹) ا^۳ - ا^۲ (ب + ح) + ب ح) (ب - ح) ا^۲ - (ب^۲ + ح^۲) ا + ح ب^۲ - ب ح^۲ (ب^۲ ...) ا + (ب^۲ - ح^۲)

(ب - ح) ا^۳ - (ب^۲ - ح^۲) ا^۲ + ب ح (ب - ح) ا

(ب^۲ - ح^۲) ا^۲ - (ب^۳ + ب^۲ح + ب ح^۲ + ح^۳) ا + ح ب^۳ - ب ح^۳

[ب^۲ - ح^۲] ا^۲ - (ب^۳ + ب^۲ ح - ب ح^۲ + ح^۳) ا + ح ب^۳ - ب ح^۳

(۴۰) ا^۲ لا^۲ + ب^۲ ی^۲ + ا^۲ ی^۲ + ب^۲ لا^۲ + ح^۲ لا^۲ + ح^۲ ی^۲ = (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) لا^۲

+ (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) ی^۲ = (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) (لا^۲ + ی^۲) اسلئی خارج قسمت ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ ہوا

(۴۱) مقسوم = (ا^۲ - لا^۲) (لا + ب) = (ا + لا) (ا - لا) (لا + ب) اسلئی خارج قسمت ا + لا ہوا

(۴۲) ا^۲ - ب^۲ - ح^۲ + د^۲ - ۲ (ا د - ب ح) = ا^۲ - ۲ ا د + د^۲ - (ب^۲ + ۲ ب ح + ح^۲)

= (ا - د)^۲ - (ب + ح)^۲ = (ا - د + ب + ح) (ا - د - ب - ح)

(۴۳) اول لا + ا پر تقسیم کیا تو ب (لا^۲ - ا لا + ا^۲) + ا لا (لا - ا) + ا^۳ اور یہہ برابر ہے

ب (لا^۲ - ا لا + ا^۲) + (لا^۲ - ا لا + ا^۲) ا = (ا + ب) (لا^۲ - ا لا + ا^۲)

اسلئی خارج لا^۲ - ا لا + ا^۲ ہوا

(۴۴) مقسوم اوسکی جز کی صورت یہہ ہی کہ لا^۶ + ی^۶ - ۲ لا^۳ ی^۳ + ۳ لا^۲ (- لا ی + ی^۲)

+ ۳ لا ی (لا^۲ + ی^۲) + ۳ ی^۲ (لا^۲ - لا ی) - ۶ لا^۳ ی^۳

= لا^۶ - ۳ لا^۵ ی + ۶ لا^۴ ی^۲ - ۷ لا^۳ ی^۳ + ۶ لا^۲ ی^۴ - ۳ لا ی^۵ + ی^۶

اسلئے دونو جز = ۲ (لا^۶ + ۶ لا^۴ ی^۲ + ۶ لا^۲ ی^۴ + ی^۶) =

اور اسکو ہم اس صورت مین رکہہ سکتی ہین کہ ۲ (لا^۲ + ی^۲)^۳ اسی ثابت ہوا کہ ۲ (لا^۲ + ی^۲) پر

تقسیم ہوتا ہے اور مقسوم کو ۲ (لا^۲ + ی^۲)^۳ + ۶ لا^۲ ی^۲ (لا^۲ + ی^۲) کی صورت مین رکہہ سکتی ہین

(۴۵) مقسوم علیہ = لا^۷ + ۷ لا^۶ ی + ۲۱ لا^۵ ی^۲ + ۳۵ لا^۴ ی^۳ + ۲۱ لا^۲ ی^۵ + ۷ لا ی^۶ + ی^۷ + لا^۷ - ی^۷

ح (ص - ا) (ص - ب) = ح (ص^{2} - ص (ا + ب) + اب)

ان کے جمع کرنے سے حاصل جمع ۳ص^{3} - ۲ص (اب + بح + حا) + ۳ اب ح حاصل ہوتا ہے

۲ (ص - ا) (ص - ب) (ص - ح) = ۲ [ص^{3} - ص (اب + بح + حا) - اب ح]

ان دونوں کا حاصل جمع اب ح ہے

(۱۰) ا^{3} + ب^{3} + ح^{3} + ۳ا^{2} (ب + ح) + ۳ب^{2} (ا + ح) + ۳ح^{2} (ا + ب) + ۶ اب ح

- (ب^{3} + ۳ ب ح (ب + ح) + ح^{3}) - (ح^{3} + ۳ح ا (ح + ا) + ا^{3}) - (ا^{3} + ۳اب (ا + ب) + ب^{3})

+ ا^{3} + ب^{3} + ح^{3} = ۳ا^{2} (ب + ح) + ۳ب^{2} (ا + ح) + ۳ح^{2} (ا + ب) + ۶ اب ح - ۳ب^{2} (ا + ح)

- ۳ح^{2} (ا + ب) - ۳ ا^{2} (ب + ح) + ۶ اب ح = ۶ اب ح

(۱۱) (ص - ا$_{1}$)^{2} = ص^{2} - ۲ص ا$_{1}$ + ا$_{1}^{2}$

(ص - ا$_{2}$)^{2} = ص^{2} - ۲ص ا$_{2}$ + ا$_{2}^{2}$

ایسے ن جملوں کے جمع کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ ن ص^{2} - ۲ص [ا$_{1}$ + ا$_{2}$ + ... ا$_{ن}$] + ا$_{1}^{2}$ + ا$_{2}^{2}$ ... ا$_{ن}^{2}$

اور ۲ص [ا$_{1}$ + ا$_{2}$ ... ا$_{ن}$] = ن ص^{2} ∴ نتیجہ مطلوب حاصل ہو گیا اول دو جز محو ہوں گے

(۱۲) (ق^{2} - ا^{2}) (ق^{2} - ب^{2}) + (ق^{2} - ب^{2}) (ق^{2} - ح^{2}) + (ق^{2} - ح^{2}) (ق^{2} - ا^{2})

= ۳ ق^{4} - ۲ ق^{2} (ا^{2} + ب^{2} + ح^{2}) + ا^{2} ب^{2} + ب^{2} ح^{2} + ح^{2} ا^{2}

= ۳ ق^{4} - ۴ ق^{4} + ا^{2} ب^{2} + ب^{2} ح^{2} + ح^{2} ا^{2}

= - (ا^{2} + ب^{2} + ح^{2})^{2} / ۴ + ا^{2} ب^{2} + ب^{2} ح^{2} + ح^{2} ا^{2}

= ¼ (۲ا^{2} ب^{2} + ۲ ب^{2} ح^{2} + ۲ ح^{2} ا^{2} - ا^{4} - ب^{4} - ح^{4})

اور ۴ص (ص - ا) (ص - ب) (ص - ح) = (ا + ب + ح) (ب + ح - ا) (ح + ا - ب) (ا + ب - ح) / ۴

اور اب ۲۳ مثال باب سوم کی دیکھ لو گے تو جان لو گے کہ دعوی ثابت ہو گیا

چھٹا باب

(۱) لا^{3} - لا - ۲) لا^{3} - ۳لا + ۲ (ا باقی کو ۲ پر تقسیم کرو علامت بدلو

- لا^{2} / - ۲ ؛ لا - ۲ / لا + ۴

لا - ۲) لا^{2} - لا - ۲ (لا + ۱

لا^{2} - ۲لا

لا - ۲

لا - ۲

-46 پر تقسیم کرو

$$x-2)\;3x^2-23x+34\;(3x-17$$
$$3x^2-6x$$
$$0-17x+34$$
$$17x+34$$

(۱۰)
$$x^4+2x^3-x-2)\;x^4-x^3+2x^2+x+3\;(1$$
$$x^4+2x^3\qquad -x-2$$
$$-3x^3+2x^2+2x+5$$

نئے مقسوم کو ۳ میں ضرب دے اور مقسوم علیہ کے علامات بدلو

$$3x^3-2x^2-2x-5)\;3x^4+6x^3-3x-6\;(x+2$$
$$3x^4-2x^3-2x^2-5x$$
$$8x^3+2x^2+2x-6$$

۲ پر تقسیم اور ۳ میں ضرب دو اور تقسیم کرو تو

$$12x^3+3x^2+3x-9\;(4$$
$$12x^3-8x^2-8x-20$$
$$11x^2+11x+11$$

۱۱ پر تقسیم کرو

$$x^2+x+1)\;3x^3-2x^2-2x-5\;(3x-5$$
$$3x^3+3x^2+3x$$
$$-5x^2-5x-5$$
$$-5x^2-5x-5$$

(۱۱) اول جملہ کو ۳ میں ضرب دو

$$3x^3+5x^2-x+2)\;12x^4+27x^3+6x^2-6x-12\;(4x$$
$$12x^4+20x^3-4x^2+8x$$
$$7x^3+10x^2-14x-12$$

۳ میں ضرب دو اور تقسیم جاری رکھو

$$21x^3+30x^2-42x-36\;(7$$
$$21x^3+35x^2-7x+14$$
$$-5x^2-35x-50$$

۵ پر تقسیم کرو

$$x^2+7x+10)\;3x^3+5x^2-x+2\;(3x-16$$
$$3x^3+21x^2+30x$$
$$-16x^2-31x+2$$
$$-16x^2-112x-160$$
$$81x+162$$

۸۱ پر تقسیم کرو

(۸) دوسرے تیسرے جملوں کا ذو اضعاف اقل اونکا حاصل ضرب (لا^۲+۱)(لا^۲−۱) یعنے لا^۴−۱ ہے اور
پہلا جملہ = لا(لا^۲−۱) = لا(لا−۱)(لا+۱) اور لا+۱ پورا لا^۲+۱ کو اور لا−۱ پورا لا^۲−۱ کو تقسیم کرتا ہے
پس لا^۲−۱ تقسیم لا^۴−۱ کو کرتا ہے اور مقسوم علیہ اعظم لا(لا^۲−۱) اور لا^۴−۱ کا ہے اور اسی واسطے اونکا ضعف لا(لا^۴−۱) ہے

(۹) دوم اور سوم جملوں کا ذو اضعاف اقل اونکا حاصل ضرب (لا+۲ب)^۲ (لا−۲ب)^۲ یعنے (لا^۲−۴ب^۲)^۲ ہے اور پہلا جملہ اس جملہ کو پورا تقسیم کرتا ہے اسلئے ضعف (لا^۲−۴ب^۲)^۲ ہے

(۱۰) لا^۳−۶لا^۲+۱۱لا−۶) لا^۴−۹لا^۳+۲۶لا^۲−۲۴لا (۱

لا^۴−۶لا^۳+۱۱لا^۲−۶لا

−۳لا^۳+۱۵لا^۲−۱۸لا

−۳لا پر تقسیم کیا لا^۲−۵لا+۶) لا^۳−۶لا^۲+۱۱لا−۶ (لا−۱

لا^۳−۵لا^۲+۶لا

−لا^۲+۵لا−۶

−لا^۲+۵لا−۶

پس اول اور دوم جملوں کا مقسوم علیہ اعظم لا^۲−۵لا+۶ ہوا اسلئے ذو اضعاف اقل اونکا
(لا^۴−۹لا^۳+۲۶لا^۲−۲۴لا)(لا−۱) یعنی لا^۵−۱۰لا^۴+۳۵لا^۳−۵۰لا^۲+۲۴لا ہوا

لا^۳−۸لا^۲+۱۹لا−۱۲) لا^۵−۱۰لا^۴+۳۵لا^۳−۵۰لا^۲+۲۴لا (لا^۲−۲لا

لا^۵−۸لا^۴+۱۹لا^۳−۱۲لا^۲

−۲لا^۴+۱۶لا^۳−۳۸لا^۲+۲۴لا

−۲لا^۴+۱۶لا^۳−۳۸لا^۲+۲۴لا

پس لا^۳−۸لا^۲+۱۹لا−۱۲ مقسوم علیہ اعظم ہے پس اس سے معلوم ہوا کہ ضعف مطلوب
(لا^۴−۹لا^۳+۲۶لا^۲−۲۴لا)(لا−۱) ہے یعنی (لا−۱)(لا−۲)(لا−۳)(لا−۴)

(۱۱) اول دو جملوں کا مقسوم علیہ اعظم بموجب مثال ۳۲ باب ۶ تتمہ کے
لا^۲−۵لا+۶ ہے اور اونکا ذو اضعاف اقل
(لا^۳−۱۰لا^۲+۳۱لا−۳۰)(لا−۴) یعنے لا^۴−۱۴لا^۳+۷۱لا^۲−۱۵۴لا+۱۲۰ ہوا
اور یہ تیسرے جملہ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلئے یہی ذو اضعاف اقل ہے اور
= (لا−۲)(لا−۳)(لا−۴)(لا−۵)

ب (ب^2 + ح ا + ح^2) پر تقسیم کرو ۲ لا − ۳ ب) ۲ لا^2 + (۳ ب − ۲ ح) لا − ۳ ب ح (لا + ح

۲ لا^2 − ۳ ب لا

۲ ح لا − ۳ ب ح

۲ ح لا − ۳ ب ح

پس مقسوم علیہ اعظم ۲ لا − ۳ ب ہے اور پہلا جملہ = (۲ لا − ۳ ب) (لا^2 + ۲ ا لا − ب^2) اور

دوسرا جملہ = (۲ لا − ۳ ب) (لا + ح)

(۱۴) بموجب دفعہ ۷ کے جملوں کی تجزی اجزاء ضربی جبریہ میں کرو تو انکی یہہ صورت ہوگی

۲۴ (ا − ب)^2 (ا^2 + ب^2 + ا ب) اور ۹ (ا^2 + ب^2) (ا − ب) (ا − ب)^2 اور ۱۲ (ا + ب)^3 (ا − ب)^2

اسلئے ذو اضعاف اقل ۳۶ (ا − ب)^2 (ا^2 + ب^2 + ا ب) (ا^2 + ب^2) (ا + ب)^3 ا ب

اسکی یہہ صورت بھی ہوسکتی ہے ۳۶ (ا^3 − ب^3) (ا − ب)^3 (ا^2 + ب^2) یا ۳۶ (ا^2 − ب^2)^2 (ا^4 − ب^4) (ا^3 − ب^3)

باب ہشتم کسور

(۱) لا^2 + ۲ لا − ۳) لا^2 + ۶ لا − ۷ (۱

لا^2 + ۲ لا − ۳

۴ لا − ۴

۴ پر تقسیم کرو لا − ۱) لا^2 + ۲ لا − ۳ (لا پس لا − ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا

لا^2 − لا

۳ لا − ۳

۳ لا − ۳

(۲) لا^2 − ۳ لا − ۴) لا^2 − ۴ لا − ۵ (۱ علامت بدلی لا + ۱) لا^2 − ۳ لا − ۴ (لا − ۴

لا^2 − ۳ لا − ۴ — لا^2 + لا

− لا − ۱ — − ۴ لا − ۴

پس لا + ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا — − ۴ لا − ۴

(۳) لا^2 − ۳ لا + ۲) لا^3 − ۶ لا^2 + ۱۱ لا − ۶ (لا − ۳

لا^3 − ۳ لا^2 + ۲ لا

− ۳ لا^2 + ۹ لا − ۶

− ۳ لا^2 + ۹ لا − ۶

پس لا^2 − ۳ لا + ۲ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۴) شمار کنندہ = (ا + ب)^{۲} اور نسب نما = (ا + ب)

(۵) لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲۶ لا + ۲۴) لا^{۴} + ۱۰ لا^{۳} + ۳۵ لا^{۲} + ۵۰ لا + ۲۴ (لا + ۱

لا^{۴} + ۹ لا^{۳} + ۲۶ لا^{۲} + ۲۴ لا

لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲۶ لا + ۲۴

لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲۶ لا + ۲۴

پس لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲۶ لا + ۲۴ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۶) شمار کنندہ کو ۲ میں ضرب دو

۲ لا^{۳} − ۱۱ لا^{۲} + ۱۷ لا − ۶) ۶ لا^{۴} − ۳۲ لا^{۳} + ۴۶ لا^{۲} − ۱۲ لا (۳ لا

۶ لا^{۴} − ۳۳ لا^{۳} + ۵۱ لا^{۲} − ۱۸ لا

لا^{۲} − ۵ لا + ۶

لا^{۲} − ۵ لا + ۶) ۲ لا^{۳} − ۱۱ لا^{۲} + ۱۷ لا − ۶ (۲ لا − ۱

۲ لا^{۳} − ۱۰ لا^{۲} + ۱۲ لا

− لا^{۲} + ۵ لا − ۶

− لا^{۲} + ۵ لا − ۶

پس لا^{۲} − ۵ لا + ۶ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۷) ۲ لا^{۳} − لا^{۲} − لا + ۲) ۶ لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۴ (۳

۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۳ لا + ۶

− ۲ لا^{۲} + ۳ لا − ۲

علامتیں بدل لیں ۲ لا^{۲} − ۳ لا + ۲) ۲ لا^{۳} − لا^{۲} − لا + ۲ (لا + ۱

۲ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} + ۲ لا

۲ لا^{۲} − ۳ لا + ۲

۲ لا^{۲} − ۳ لا + ۲

۲ لا^{۲} − ۳ لا + ۲ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۸) شمار کنندہ کو ۳ میں ضرب دو

۳ لا^{۳} + ۵ لا^{۲} − ۱۵ لا + ۴) ۶ لا^{۴} + ۲۷ لا^{۳} + ۲۱ لا^{۲} − ۹ (۲ لا

۶ لا^{۴} + ۱۰ لا^{۳} − ۳۰ لا^{۲} + ۸ لا

۱۷ لا^{۲} + ۵۱ لا − ۱۷

۱۷ پر تقسیم کیا لا^{۲} + ۳ لا − ۱) ۳ لا^{۳} + ۵ لا^{۲} − ۱۵ لا + ۴ (۳ لا − ۴

۳ لا^{۳} + ۹ لا^{۲} − ۳ لا

− ۴ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۴

− ۴ لا^{۲} − ۱۲ لا + ۴

پس لا^{۲} + ۳ لا − ۱ مقسوم علیہ اعظم ہوا

نواں باب

(۱) ۸ میں ضرب دو ۸لا + ۳ = ۶لا + ۵ ∴ لا = ۲

(۲) ۲۰ میں ضرب دو ۱۰لا − ۴۰ = ۵لا + ۴لا − ۲۰ ∴ لا = ۲۰

(۳) ۴۰ میں ضرب دو ۲۰لا + ۲۰ + ۲۴لا − ۳۲ + ۵ = ۳۰لا + ۳۵ ∴ لا = ۳

(۴) ۶۰ میں ضرب دو ۱۵(۵لا − ۱۱) − ۶(لا − ۱) = ۵(۱۱لا − ۱) ∴ لا =

(۵) ۱۲ میں ضرب دو ۶لا + ۴لا − ۳لا = ۶ ∴ لا = ۶/۷

(۶) ۱۲ میں ضرب دو ۶(لا + ۱) + ۴(لا + ۲) = ۱۹۲ − ۳(لا + ۳)

(۷) ۶ میں ضرب دو ۶لا + ۲(۱۱ − لا) = ۳(۲۶ − لا)

(۸) ۲ میں ضرب دو ۳۸لا + ۷لا − ۲ = ۸لا + ۳۵

(۹) ۲۴ میں ضرب دو ۶(لا − ۳) + ۸(لا − ۴) = ۱۲(لا − ۵) + ۳(لا + ۱)

(۱۰) ۶ میں ضرب دو ۳(۵لا − ۷) − ۲(۲لا + ۷) = ۶(۳لا − ۱۴)

(۱۱) ۶۰ میں ضرب دو ۱۵(لا − ۳) − ۱۰(۲لا − ۵) = ۴۱ + ۱۲(۳لا − ۸) − ۴(۵لا + ۶)

(۱۲) ۶ میں ضرب دو ۲(۵لا + ۳) − ۳(۳لا − ۷) = ۶(۵لا − ۱۰)

(۱۳) ۱۸ میں ضرب دو ۳(۸ − لا) + ۱۸لا − ۳۰ = ۹(لا + ۶) − ۶لا

(۱۴) ۱۲ میں ضرب دو ۶(لا + ۳) − ۴(لا − ۲) = ۳لا − ۵ + ۳

(۱۵) ۳۰ میں ضرب دو ۶(۳لا − ۱) − ۱۵(۱۳ − لا) = ۶۰لا − ۵۵(لا + ۳)

(۱۶) ۴۲ میں ضرب د ۶(۳لا − ۵) − ۱۴(۹ − لا) = ۱۰۵لا + ۱۳۳ (لا − ۴)

(۱۷) ۷×۵×۱۱ میں ضرب دو ۵۵(۵لا − ۱) + ۳۵(۹لا − ۵) = ۷۷(۹لا − ۷)

(۱۸) ۳×۵×۷ میں ضرب دو ۱۵(۳لا + ۵) − ۳۵(۲لا + ۷) + ۱۰۵ − ۶۳لا = ۰

(۱۹) ۱۲ میں ضرب دو ۳لا − ۲(۵لا + ۸) = ۴(۲لا − ۹)

(۲۰) ۶ میں ضرب دو ۱۲لا − ۳(۱۹ − ۲لا) = ۲(۲لا − ۱۱)

(۲۱) ۶لا+۹/۳ − لا + (۲لا−۱)/۹ = ۶ کو ۳۶ میں ضرب دو

(۲۲) (۶+۹لا)/۴ − ۱ + (۲−لا)/۹ = ۶لا کو ۳۶ میں ضرب دو

(۲۳) ۱۲ میں ضرب دو ۶ (لا+۱) − ۳ (۵−لا) = ۱۶۸ − ۴ (لا+۲)

(۲۴) ۲۲ میں ضرب دو تو ۲ (۷لا − ۸) + ۲۲(۱۵لا+۸)/۱۲ = ۶۶لا − ۱۱(۳۱−لا)

یعنی ۱۴لا − ۱۶ + ۲۲(۱۵لا+۸)/۱۲ = ۶۶لا − ۳۴۱ + ۱۱لا

اسواسطے ۲۲(۱۵لا+۸)/۱۳ = ۶۳لا − ۳۲۵ اب ۱۳ میں ضرب دو

(۲۵) ۸ میں ضرب دو ۲(۳لا−۱۱) − (۲۸−۹لا) = ۳۲لا − ۱۱۸

(۲۶) ۱۲ میں ضرب دو ۴(۲لا−۱) − ۳(۳لا−۲) = ۲(۵لا−۴) − (۷لا+۴)

(۲۷) ۱۰۸ میں ضرب دو ۴(۲لا−۹) + ۶لا − ۲۷(لا−۳) = ۹۰۰ − ۱۰۸لا

(۲۸) ۱۲۰ میں ضرب دو ۴۰(لا−۱) + ۲۴[۴لا − ۳/۵] − ۱۵(۷لا−۶) = ۱۴۰ + ۶۰(لا−۲) + ۱۲(۳لا−۹)

(۲۹) ۵×۹×۱۳ میں ضرب دو ۱۱۷ (۲لا−۶) − ۶۵(لا−۴) − ۱۳۵لا = ۰

(۳۰) ۶ میں ضرب دو ۹لا = ۱۸لا − ۳(۴−لا) + ۲

(۳۱) ۴۵ میں ضرب دو ۹(۳لا−۷) + ۵(۲۵−۴لا) = ۱۵(۵لا−۱۴)

(۳۲) ۸×۱۳×۱۹ میں ضرب دو ۱۵۲(۲لا+۵) + ۲۴۷(۴۰−لا) = ۱۰۴(۱۰لا−۲۷)(۴

(۳۳) لا/۷ − (لا−۵)/۱۱ + ۵ = لا − ۱۲لا/۷۷ − ۱ کو ۷۷ میں ضرب دو

(۳۴) ۱۲ میں ضرب دو ۶(لا−۱) + ۴(لا−۲) = ۳(لا+۳) + ۲(لا+۴) +

(۳۵) ((لا−۱)(لا−۳) − (لا−۲)²) / ((لا−۲)(لا−۳)) = ((لا−۵)(لا−۷) − (لا−۶)²) / ((لا−۶)(لا−۷))

یعنی ۱/((لا−۲)(لا−۳)) = ۱/((لا−۶)(لا−۷))

یعنی (لا−۶)(لا−۷) = (لا−۲)(لا−۳) یعنی لا² − ۱۳لا + ۴۲ = لا² − ۵لا + ۶

یعنی ۸لا = ۳۶ ∴ لا = ۳۶/۸ = ۴½

(۳۶) لا² − ۷لا + ۱۰ − (۲لا² − ۱۵لا + ۲۵) + لا² + ۵لا − ۱۴ = ۰

اسواسطے ۲(۳لا۲ - ۱۰لا + ۳) + (۶لا۲ - ۱۷لا + ۱۵) = ۶(۲لا۲ - ۱۱لا + ۱۵)

(۴۹) لا + ۱ میں ضرب دو ۲۵ - ۱/۳ لا + لا(لا + ۱)(۱۶لا + ۴ ۱/۵) / (۳لا + ۲) = ۲۳ + ۵(لا + ۱)

اسواسطے (لا + ۱)(۱۶لا + ۴ ۱/۵) / (۳لا + ۲) = ۳لا + ۱۶/۳ لا

(لا + ۱)(۱۶لا + ۲۱/۵) = (۳لا + ۲)(۳ + ۱۶/۳ لا)

۱۶لا۲ + ۲۱لا/۵ + ۱۶لا + ۲۱/۵ = ۱۶لا۲ + ۳۲لا/۳ + ۹لا + ۶ ۰

(۵۰) ۶۰ میں ضرب دو تو ۳۰(لا - ا/۳) - ۲۰(لا - ا/۴) + ۱۵(لا - ا/۵) = ۰

یعنے ۳۰لا - ۱۰ا - ۲۰لا + ۵ا + ۱۵لا - ۳ا = ۰ یعنی ۲۵لا = ۸ا

(۵۱) لا۲ + (ا + ب)لا + اب = لا۲ + (ح + د)لا + ح د

(۵۲) ا(ب۲ - ا۲) میں ضرب دو تو (ب۲ - ا۲)لا + ا(اب + ا)لا = ا۲(ب - ا)

اسواسطے ب(ب + ا)لا = ا۲(ب - ا) ∴ لا = ا۲(ب - ا) / ب(ب + ا)

(۵۳) اب میں ضرب دو ا۲ب لا + اب۲ = ب لا + ا ∴ ب(ا۲ - ۱)لا = ا(۱ - ب۲)

(۵۴) اب ح میں ضرب دو اح(لا - ا) + اب(لا - ب) + ب ح(لا - ح) = لا - (ا + ب + ح)

(اح + اب + ب ح - ۱)لا = ا۲ح + اب۲ + اح۲ ب - (ا + ب + ح)

(۵۵) لا۲ + (ا + ب)لا + اب - اب - اح = ا۲ح/ب + لا۲

(ا + ب)لا = ا۲ح/ب + اح = اح(ا + ب)/ب ∴ لا = اح/ب

(۵۶) کسر دور کرو (ا + ب)(لا - ب)(لا - ا) = ا(لا - ب)(لا - ح) + ب(لا - ا)(لا - ح)

(ا + ب)لا۲ - (ا + ب)۲لا + اب(ا + ب) = (ا + ب)لا۲ - [ح(ا + ب) - ۲اب]لا + ۲اب ح

اسواسطے [ا۲ + ب۲ - ح(ا + ب)]لا = اب(ا + ب) - ۲اب ح

(۵۷) اع لا۲ + (اق + ب ع)لا۲ + (ب ق + ح ع)لا + ح ق = اع لا۲ + (اق + ب ع)لا۲ + (ق ب + ر ا)لا + ر ب

اسواسطے (ح ع - ر ا)لا = ر ب - ح ق

(۵۸) ا(ا + ب)۲ میں ضرب دو تو ۳ا۲ب ح(ا + ب) + ا۳ ب۲/(ب + ا) + (۲ا + ب)ب۲ لا

= ۳اح لا(ا + ب)۲ + ب(ا + ب۲)لا

(۴۴) ۲۸/۱۰ لا − ۱۱/۵ (۲۲/۱۰۰ لا − ۵/۱۰۰) = ۱۴/۱۰ لا + ۸۹/۱۰ اسواسطے ۱۴۵ لا/۱۰ − ۱۴۴/۱۰۰ + ۱/۱۰ = ۱۱۱۶/۱۰ + ۸۹/۱۰

باب دہم

(۱) فرض کرو کہ غریب آدمی کا روپیہ لا ہے تو امیر آدمی کا روپیہ ۲ لا ہوگا پس لا + ۲ لا = ۳۸۷۰

(۲) فرض کرو کہ ایک شخص نے لا دفعہ اٹھنی پائی تو لا/۲ روپیہ اوسنے پایا اور دوسرے نے ۵/۱۶ لا روپیہ پایا تو لا/۲ + ۵لا/۱۶ = ۵۲۰ اسواسطے لا = ۶۴۰ پس ۳۲۰ روپیہ ایک شخص نے اور دوسرے نے ۲۰۰ روپیہ پائی

(۳) فرض کرو کہ تھیلی میں لا آنے ہیں تو لا/۵ + لا/۴ = ۴۵

(۴) فرض کرو کہ بل کے روپیہ کی تعداد لا روپیہ ہے تو لا − لا/۷ − لا/۵ = ۹۲

(۵) فرض کرو کہ ایک حصہ لا ہے تو دوسرا حصہ ۴۶ − لا ہوگا پس لا/۷ + (۴۶ − لا)/۳ = ۱۰

(۶) فرض کرو کہ بچوں کے تعداد لا تھی تو لا + ۴ لا + ۲ لا = ۲۶۶

(۷) فرض کرو کہ آمدنی میں تعداد روپیہ کی لا ہے تو لا/۳ + لا/۸ + لا/۱۰ + ۳۱۸ = لا

(۸) فرض کرو کہ ب گاؤں سے لا روپیہ اکٹھا کیا گیا تو ۳لا/۵ روپیہ آ سے اور ۷لا/۸ روپیہ ج سے اکٹھا کیا گیا

لا + ۳لا/۵ + ۷لا/۸ = ۷۴۲ ۱/۲

(۹) فرض کرو کہ زید کو لا روپیہ ملا تو بکر کو لا + ۱۰۰ اور عمر کو لا + ۱۰۰ + ۲۷۰ ملا

پس لا + لا + ۱۰۰ + لا + ۱۰۰ + ۲۷۰ = ۱۵۲۰

(۱۰) فرض کرو کہ جو روپیہ تقسیم ہوا اوسکی تعداد لا ہے — تو زید کو لا/۲ − ۳۰ روپیہ اور بکر کو لا/۳ − ۱۰ اور عمر کو لا/۴ + ۸ روپیہ ملا پس

لا/۲ − ۳۰ + لا/۳ − ۱۰ + لا/۴ + ۸ = لا

(۱۱) فرض کرو کہ بڑی عدد کو لا تعبیر کرتا ہے تو ۵۷۶۰ − لا دوسرے عدد کو تعبیر کریگا

لا − (۵۷۶۰ − لا) = لا/۲۰

(۱۲) فرض کرو کہ ایک پیپہ میں شراب کے تولوں کی تعداد لا ہے تو لا − ۳۴ ایک پیپہ میں اور لا − ۸۰ دوسرے پیپہ میں شراب ہوگی تو لا − ۳۴ = ۲(لا − ۸۰)

(۲۵) فرض کرو کہ پہلی تین روپیوں کی تعداد لا تھی تو زید نے [۲ + (لا-۲)/۶] روپیہ لگائی اور بکر نے ۳ + ۱/۶ [لا - ۲ - (لا-۲)/۶ - ۳] روپیہ لگائے

۲ + (لا-۲)/۲ = ۳ + (لا-۵)/۶ - (لا-۲)/۳۶

(۲۶) فرضکرو کہ خرگوش کی ذقندوں کی تعداد لا ہے تو کتا ۲لا/۳ ذقندیں لگائے گا اور یہ برابر ۴لا/۳ خرگوش کے ذقندوں کے ہیں پس لا + ۸۰ = ۴لا/۳

(۲۷) فرض کرو کہ کھیت کے عرض میں گزوں کی تعداد لا ہے تو ۲لا طول میں گزوں کی تعداد ہوگی اور ۲لا² رقبہ گا اور دوسرے کھیت کا طول ۲لا + ۵۰ اور عرض لا + ۱۰ اور رقبہ (۲لا + ۵۰) (لا + ۱۰) ہوگا

پس (۲لا + ۵۰) (لا + ۱۰) = ۲ لا² + ۶۸۰۰

(۲۸) فرض کرو کہ فٹوں کے تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۰۷ کے

لا/۸۰ + لا/۲۰۰ + لا/۳۰۰ = ۱

(۲۹) فرض کرو کہ آمدنی جو ۱۰۰ سالیانہ سے کم تھی اوسمیں پونڈ کی تعداد لا ہی تو ۵۰۰۰۰ - لا تعداد اوس آمدنی کی پونڈ کے ہوگی جو ۱۰۰ پونڈ سالیانہ سے زاید ہے تو ۷لا/۲۴۰ اون پونڈوں کے تعداد ہوگی جو اول آمدنی سے وصول ہونگے اور (۵۰۰۰۰ - لا)/۲۰ اون پونڈوں کے تعداد ہوگی جو دوسرا آمدنی سے پس

۷لا/۲۴۰ + (۵۰۰۰۰ - لا)/۲۰ = ۱۸۵۰

(۳۰) فرض کرو کہ بڑی قیمت کے ایک سیر مرچوں میں کم قیمت مرچیں لا سیر ملائی تو ان ملی جلی مرچوں کے قیمت آنوں میں ۵ + ۳لا ہوگی اور وہ ۱۱/۱۲ (لا + ۱) آنوں کو فروخت ہوگی

پس ۱۱/۱۲ (لا + ۱) = ۵ + ۳لا + (۵ + ۳لا)/۱۰

(۳۱) فرضکرو کہ نارنگیوں کی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو ۱۸ + لا سیبوں کی تعداد کو تعبیر کریگا ہر ایک سیب کے قیمت ۳/۲ پائی ہے تو ۳۰ سیبوں کے قیمت ۲۱ پائی ہوگی ۵ نارنگیوں کی قیمت ۲۱½ پائی ہوگی یعنی ایک نارنگی کی قیمت ۳/۵ پائی اسلیے ۳لا/۵ + ۳/۲ (لا + ۱۸) = ۲۳۴

(۳۲) فرضکرو کہ ا بیپہ مین سے جو گیلن نکالین اونکے تعداد لا ہی تو ب بیپہ سے جو گیلن نکالینگے اونکی تعداد ۱۴-لا ہوگی - اب ا مین سے جو نکالا گیا ہے اوسمین سے ۲/۵ حصے شراب ہے اور ب مین سے جو نکالا گیا ہے اوسمین ۳/۴ شراب ہے، پس ۲لا/۵ + ۳/۴ (۱۴ - لا) = ۷

(۳۳) فرض کرو کہ رادہا جتنی دنون مین خندق کہودتا ہی اونکی تعداد کو ۳لا تعبیر کرتا ہے تو سوہن جتنی دنون مین خندق کہودتا ہے اونکی تعداد کو ۲لا اور موہن جتنی دنون مین خندق کہودتا ہے اوسکی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہی تو ۶ دن مین رادہا ۶/۳لا اور سوہن ۶/۲لا اور موہن ۶/لا حصے خندق کے کہودینگے اسواسطے ۶/۳لا + ۶/۲لا + ۶/لا = ۱

(۳۴) فرض کرو کہ اوسکی امدنی کے پونڈون کے تعداد لا ہی تو ۷/۲۴۰ لا پونڈ وہ انکم ٹیکس کے دیتا ہے پس لا - ۷/۲۴۰ لا = ۴۰۸ ۱۳۱/۴۸۰

(۳۵) فرض کرو کہ جسوقت فرق مطلوب ہے اوسوقت ایک بجی پر جتنی منٹ گذری ہون اونکی تعداد لا ہو جب بڑی سوئی لا منٹ حصون پر گذریگی تو چہوٹی سوئی کہ اوسی بارہ دفعہ سست چلتی ہے لا/۱۲ حصے طی کریگی لیکن وہ ایک بجی پر ۵ حصے بڑی سوئی سے آگے ہے اسلئے

$$۵ + لا/۱۲ = لا - ۱$$

(۳۶) فرض کرو کہ جتنی دور جانے اوسکی میلون کی تعداد لا ہی تو وہ بگہی مین لا/۹ گہنٹو مین جائیگا اور لا/۳ گہنٹون مین واپس ائیگا پس لا/۹ + لا/۳ = ۹

(۳۷) فرض کرو کہ بعد کمی محصول جو فی من محصول لیا گیا اوسکے انون کی تعداد لا ہے اب صرف اوس چیز کا ڈیوڑہا ہو گیا تو ۳لا/۲ آمدنی محصول ہوگی یہہ محصول ایک تہائی گہٹ گیا ہی یعنی آمدنی محصول کے دو تہائی رہ گئی ہے اسلئے ۳لا/۲ = ۲/۳ × ۶

(۳۸) فرض کرو کہ جہاز مین جتنی آدمی تہی اونکی تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے تو اوسمین ۶۰لا روز کہانے کا سامان ہوگا اب بیس روز بعد جب طوفان ایا تو ۲۰لا ذخیرہ صرف ہوا ہوگا اب ۱۵ آدمیوں کے مرنے کی بعد تعداد آدمیون کی لا - ۵ ہوئی اور خوراک اونکی ۵/۴ (لا - ۵)

اور ۲۴ روز کا توقف ہو لو ۲۴ ۶ دن وہ ذخیرہ چلا اسلئی ۶۰ لا = ۲۰ لا + ۵۰/۲ (لا - ۵)

گیارہوان باب

(۱۵) مساواتون کو سادہ بناؤ تو لا - ۵ ی = ۱۴۸ اور ۷ لا + ی = ۱۳۲

(۱۶) اول مساوات سے ۳۴۳ لا = ۹۱ ی اسواسطے ۱۱ لا = ۷ ی تو لا = ۷ ی/۱۱ = (۱ + ۵ ی)/۸

(۱۷) اول مساوات کو ۱۱ مین ضرب دیئے ۸ لا - ۴۸ + ۶ ی + ۱۲ لا = ۹۶ - ۹ ی + ۱ یعنی

۲۰ لا + ۱۵ ی = ۱۴۵ یعنی ۴ لا + ۳ ی = ۲۹ دوسرے مساوات ۶ مین ضرب دو تو

ی - ۳ لا + ۱۲ = ۱ - ۱۲ لا + ۳۶ یعنی ۹ لا + ی = ۲۵ اب اس مساوات کو ۳ مین ضرب دیکے

پہلے مساوات سے تفریق کرلو

(۱۸) ۴ لا + ۸ ی = ۲۴/۱ اور ۱/۲ لا - ۶ ی = ۳۴۸/۱۰۰ اب اول مساوات کو ۳ مین

اور دوسرے مساوات ۴ مین ضرب دیکر جمع کرلو

(۱۹) لا کے قیمت جو دوسری مساوات مین سے نکلے اوسکو اول مساوات مین رکھو

۱/۵ (۸ ی + ۷ ی) - ۱ = ۲/۲۳ (۸ ی - ۶ ی + ۱) یعنی ۳ ی - ۱ = ۴/۲۳ ی + ۲/۲۳ اب ۳ مین ضرب دیکے لو

(۲۰) اول مساوات کو ۴ مین ضرب دیئے ۴ لا + ۲ (۳ لا - ی - ۱) = ۱ + ۳ (ی - ۱) یعنی ۱۰ لا - ۵ ی = ۰

اسواسطے ی = ۲ لا اس قیمت کو دوسرے مساوات مین مندرج کرو ۱/۵ (۴ لا + ۶ لا) = ۱۴ لا/۱۰ + ۲

یعنے ۲ لا = ۷ لا/۵ + ۲

(۲۱) اول مساوات کو ۱۰ مین ضرب دیئے ۵ (۳ لا - ۵ ی) + ۳۰ = ۲ (۲ لا + ی) یعنی ۱۱ لا - ۲۷ ی = - ۳۰

دوسرے مساوات کو ۱۲ مین ضرب دیئے تو ۹۶ - ۳ (لا - ۲ ی) = ۶ لا + ۴ ی یعنی ۹ لا - ۲ ی = ۹۶

(۲۲) اول مساوات کو ۸ مین ضرب دیئے ۴ ۵ لا - ۱۲ ی - ۸۰ = ۵ لا - ۱۰ ی یعنی ۳۹ لا - ۲ ی = ۸۰

دوسری مساوات کو ۶۰ مین ضرب دو ۱۲۰ لا - ۱۶۰ = ۵ لا - ۴ ی + ۶۶

یعنے ۱۱۵ لا + ۴ ی = ۲۲۶ اب پہلی مساوات کو ۲ مین ضرب دیکر دوسرے مساوات کے ساتھہ جمع کرو

(۲۳) اول مساوات کو ۳۰ مین ضرب دیئے ۶ (۴ لا - ۳ ی - ۷) = ۹ لا - ۴ ی - ۲۵ یعنی ۵ لا - ۴ ی = ۱۷

دوسری مساوات کو ۶۰ مین ضرب دو ۲۰(ی − ۱) + ۳۰لا − ۹ی − ۶۰ = ۴(ی − لا) + ۱۰لا + ۶۶

یعنی ۴۴لا + ۷ی = ۱۸۶ اس مساوات کو ۲ مین ضرب دیکر پہلی مساوات کے ساتھ جمع کرو

(۲۴) اول مساوات کی یہہ صورت ہے کہ $\frac{۲}{۷}\left(\frac{۲لا}{۳} - \frac{۵ی}{۱۲}\right) - \frac{۲}{۳۲}\left(\frac{۳لا}{۲} - \frac{ی}{۳}\right) = ۲$

یعنی $\frac{۸لا}{۲۱} - \frac{۵ی}{۲۱} - \frac{۳لا}{۲۳} + \frac{۲ی}{۶۹} = ۲$ اسکو ۲۱ × ۲۳ مین ضرب دو

۱۸۴لا − ۱۱۵ی − ۶۳لا + ۱۴ی = ۹۶۶ یعنی ۱۲۱لا − ۱۰۱ی = ۹۶۶

دوسری مساوات ۵لا − ۵ی = لا + ی یعنے ۴لا = ۶ی یعنے ۲لا = ۳ی

(۲۵) اول مساوات کو ۳ × ۵ × ۷ × ۸ مین ضرب دو ۲۸۰(۳لا − ۴ی) + ۸۴۰ + ۱۰۵(۱۱ی − ۱۰) =

۱۲۰(۴لا − ۳ی + ۵) + ۱۶۸(۴۵ − لا) یعنی ۸۴۰لا − ۱۱۲۰ی + ۸۴۰ + ۱۱۵۵ی − ۱۰۵۰

= ۴۸۰لا − ۳۶۰ی + ۶۰۰ + ۷۵۶۰ − ۱۶۸لا یعنی ۵۲۸لا + ۹۵۵ی = ۸۴۷۰

دوسری مساوات کو ۱۸ مین ضرب دو ۸۱۰ − ۲۴لا + ۱۲ = ۵۵لا + ۷۱ی + ۱ یعنی

۷۹لا + ۷۱ی = ۸۲۱ اول مساوات کو ۷۱ مین اور دوسری کو ۹۵۵ مین ضرب دیکر تفریق کر لو

(۲۶) اول مساوات $\frac{۲۴}{۱۰}لا + \frac{۳۲}{۱۰۰}ی - \frac{\frac{۳۶}{۱۰۰}لا - \frac{۵}{۱۰۰}}{\frac{۵}{۱۰}} = \frac{۸لا}{۱۰} + \frac{\frac{۲۶}{۱۰}ی + \frac{۵}{۱۰۰۰}ی}{\frac{۲۵}{۱۰۰}}$

یعنی $\frac{۲۴}{۱۰}لا + \frac{۳۲}{۱۰۰}ی - \frac{۱۰}{۵}\left(\frac{۳۶}{۱۰۰}لا + \frac{۵}{۱۰۰}\right) = \frac{۸لا}{۱۰} + \frac{۱۰۰}{۲۵}\left(\frac{۲۶}{۱۰}ی + \frac{۵}{۱۰۰۰}ی\right)$

۱۰۰ مین ضرب دو تو ۲۴۰لا + ۳۲ی − ۷۲لا + ۱۰ = ۸۰لا + ۱۰۴۰ی + ۲ی

یعنی ۸۸لا + ۳۰ی = ۱۰۳۰ اور اب دوسری مساوات $\frac{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۴ی}{۱۰۰}}{\frac{۳}{۱۰}} = \frac{\frac{۷لا}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰}}{\frac{۶}{۱۰}}$

یعنی $\frac{۱۰}{۳}\left(\frac{۴ی}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰}\right) = \frac{۱۰}{۶}\left(\frac{۷لا}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰}\right)$ اب $\frac{۶}{۱۰}$ مین ضرب دو

تو $۲\left(\frac{۴ی}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰}\right) = \frac{۷لا}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰}$ اب ۱۰۰ مین ضرب دو ۸ی + ۲۰ = ۷۰لا − ۱۰

یعنی ۷۰لا − ۸ی = ۳۰ اب پہلی مساوات کو ۴ مین ضرب دو اور دوسرے کو ۱۵ مین اور جمع کرو

(۲۷) اول مساوات کو ۶ مین اور دوسری کو ۱۱ مین ضرب دیکر جمع کر لو

(۲۸) اول مساوات کو ن مین ضرب دیا تو $\frac{م ن}{لا} + \frac{ن^۲}{ی} = ن$ اور دوسرے

مساوات کو م مین ضرب دیا تو

م ن/لا + م²/ی = م تفریق کیا تو م² − ن²/ی = م − ن ∴ (م − ن) ی = م² − ن²
اسلئے ی = م + ن اب پہلی اول مساوات کو م مین اور دوسری کو ن مین ضرب دیکر تفریق کرو
تو لا = م + ن کے حاصل ہوگا

(۲۹) دوسرے مساوات کو ۲ مین ضرب دیا تو ۲/لا + ۶/ی = ۳ اسکو پہلی مساوات سے تفریق کیا تو ۱/لا = ۲

(۳۰) اول مساوات کو ن مین اور دوسرے کو ب مین ضرب دو اور جمع کرو تو (ن ا + م ب) لا = ن ح + ب د
اور پھر مساوات اول کو م مین اور دوم کو ا مین ضرب دیکر تفریق کرو تو (م ب + ا ن) ی = م ح − ا د

(۳۱) (ا + ح) لا + (ب + ح) ی = ۲ (ا + ح) (ب + ح) اور ا لا − ب ی = (ا − ب) ح
اب اول مساوات کو ب مین اور دوسرے کو ب + ح مین ضرب دیکر جمع کرو تو
لا (ح (ا + ب) + ۲ ا ب) = ح² (ا + ب) + (۳ ا ب + ب²) ح + ۲ ا ب² تقسیم کرکے
لا = ح + ب اب اس قیمت کو اول مساوات مین مندرج کرو تو ا (ح + ب) − ب ی = (ا − ب) ح
∴ ب ی = ب (ا + ح) ∴ ی = ا + ح

(۳۲) دوسرے مساوات کو ا + ب مین ضرب دو اور پہلی کے ساتھ جمع کرو تو ۲ ا لا = ۲ (ا² − ب²) + ۴ ا ب (ا + ب)
= ۲ ا (ا² + ۲ ا ب + ب²) = ۲ ا (ا + ب)² سو اسلئے لا = (ا + ب)² اس قیمت کو دوسرے مساوات مین
رکھو تو (ا + ب)² − ی = ۴ ا ب سو اسلئے ی = (ا + ب)² − ۴ ا ب = (ا − ب)²

بارہوان باب

(۱۰) اول اور دوم کو جمع کیا تو ۲/لا + ۱/ی + ۱/ی = ... اور تیسرے کو تفریق کیا تو ۲/لا = ۳/۲ سو اسلئے لا = ۴/۳
اول اور دوم مساوات مین اس لا کی قیمت کو مندرج کرو تو باقی مجہول مقدارونکی قیمت معلوم ہوجائیگی

(۱۱) اول اور دوم مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور دوسرے کے ساتھ جمع کرو تو
۴/لا + ۳/ی = ۱/ی + ۲ یعنی ۴/لا − ۲/ی = ۲ اب تیسری مساوات کو ۳ مین ضرب دیکر جمع کرو
تو ۷/لا = ۶ سو اسلئے لا = ۷/۶ اسکو تیسری مساوات مین مندرج کرنے سے ی کی قیمت
اور دوسرے مین درج کرنے سے ز کی قیمت دریافت ہوگی

(۱۲) دوسرے تیسرے مساوات کو جمع کرو تو ۱۵/لا + ۹/ی = ۳۸/۳۰ اسواسطے ۱۵/لا + ۹/ی = ۴ ۳۴

اول مساوات کو ۵ مین اور دوسرے مساوات کو ۴ مین ضرب دیکر جمع کرو تو

۵۳/۱۲لا + ۱/ی = ۳۵۸/۳ اسواسطے ۵۳/لا + ۳/ی = ۳۵۸

اول مساوات حاصل شدہ کو ۷ مین اور اس مساوات کو ۱۰ مین ضرب دیکر تفریق کرو تو ۲۱۱/لا = ۸۲۲

اسواسطے لا = ۱/۴

(۱۳) اول مساوات کو ۲۰ مین دوسرے کو ۱۲ مین تیسرے کو ۴۲ مین ضرب دو اور مساواتون کو مختصر صورت مین لکھو تو

۱۰لا + ۱۵ر - ۲۴ی = ۴۱ اور ۱۵لا - ۱۲ر + ۱۴ی = ۱۰ اور ۸لا - ۱۴ر - ۷ی = -۱۳

(۱۴) کسر کو دور کرو اور مختصر کرو تو ۳۵لا - ۳ر - ۱۵ی = ۰ اور ۳لا - ر - ی = -۴

اور ۱۲۵لا + ۱۲۹ر - ۱۰۵ی = ۰

(۱۵) اول مساوات کو ۷ مین اور تیسرے کو ۳ ضرب دیکر تفریق کرو تو ۴۹لا - ۱۲ی = ۴ اور

دوسرے مساوات کو ۳ مین اور چوتہی کو ۲ مین ضرب دو اور تفریق کرو تو ۳۳لا - ۳۳ی = ۴

(۱۶) اخر تین مساواتون سے قیمت لا و ر و ی کے دریافت کرو اور اول مساوات سے و کی قیمت دریافت کرو

(۱۷) تیسرے مساوات کو ۴ مین اور چوتہی کو ۴ مین ضرب دو اور تفریق کرو

تو ۲ر + ۶لا = ۳۸ اور اول اور تیسرے مساوات کو تفریق کرو تو ۲لا - ۷ر = -۱ ایس

ان دونو مساواتون لا اور ر کے قیمت دریافت کرو

(۱۸) اول مساوات کو ۳ مین اور دوسرے کو ۷ مین ضرب دیکر تفریق کرو تو ۹۸لا - ۳۹ی = -۳۸

اب اس مساوات اور چوتہی مساوات سے لا اور ی کی قیمت دریافت کرو اور پہر تیسرے مساوات کر

ر کی اور دوسری سے و کی

(۱۹) دوسرے مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور چوتہی مساوات کو تفریق کرو تو ۴ر + ۴ی + ۳و = ۱۴

اور اول مساوات کو ۳۹ مین اور تیسرے کو ۲ مین ضرب دیکر جمع کرو تو ۳۵ر - ۶ی + ۵و = ۱۰۷

ان دو مساواتون اور پانچوین مساوات سے ر اور ی اور و کی قیمت دریافت کرو

(۲۰) مساوات سوم سی ء کی قیمت نکال کر سب مساواتوں میں رکھو اور کسر کو دور کرو اور اختصار کرو تو

۶ لا + ۲۲ ء − ۳ ی − ۳ و = ۲۸

۳ لا − ۵ ء + ۲ ی − ۴ و = ۱۱

− ۲ لا + ۱۰ ء + ۲ ی + ۷ و = ۵

۸ لا − ۳۴ ء + ۹ ی + ۳ و = ۶

ان مساواتوں میں سے اسطرح و کو دور کرو کہ اول مساوات سے اوسکی قیمت نکال کر باقی مساواتوں میں رکھو، اور اختصار کرو تو ۱۵ لا + ۳ − ۱ ء − ۱۸ ی = ۶۷ اور ۳۹ لا + ۱۸۴ ء − ۱۵ ی = ۲۱۱ اور ۷ لا − ۶ ء + ۳ ی = ۱۷ ان تین مساواتوں سی لا و ء و ی کے قیمت دریافت کرو

(۲۱) اول اور دوم مساواتوں کو جمع کیا تو ۲لا/ا + ء/ج = ۲ اور تیسرے مساوات کو تفریق کیا تو ۲لا/ا = ۱

(۲۲) اول مساوات کو ح میں اور دوسرے کو ب میں ضرب دیکر تفریق کرو تو ب ح لا + ب ا ی = ح۲ − ب۲ دوسرے مساوات اور تیسرے مساوات کو ا میں ضرب دیکر جمع کرو تو ۲ ا ح ء = ا۲ + ح۲ − ب۲

(۲۳) اول اور دوم مساوات کو جمع کیا تو ا/ی + ۲ب/ء + ج/ی = ۲ تیسرے کو تفریق کیا تو ۲ب/ء = ۱

(۲۴) مساوات اول سے ی کی قیمت نکال کی مساوات سوم میں رکھو تو (ب − ح) لا + (ح + ا) ء − (ا + ب) (لا + ی) = یعنی (ح − ا) لا = (ب − ح) ء اور مساوات اول سے ء = − (لا + ی) نکال کر مساوات سوم میں رکھو تو (ب − ا) لا = (ح − ب) ی اب ان دونو قیمتوں کو مساوات دوم میں رکھو تو

ب ح لا + ح ا (ح − ا) لا / (ب − ح) + ا ب (ب − ا) لا / (ح − ب) = ۱ یعنی

ب ح لا + [ح ا (ح − ا) − ا ب (ب − ا)] لا / (ب − ح) = ۱ یعنی

[ب ح + ا۲ − ا (ب + ح)] لا = ۱ یعنی (ا − ب) (ا − ح) لا = ۱

(۲۵) اول مساوات کو ح میں ضرب دو اور دوسرے مساوات کو تفریق کرو تو ا (ح − ا) لا + ب (ح − ب) ی = (ح − ط) ط۲ اب دوسرے مساوات کو ح میں ضرب دے اور تیسرے کو تفریق کرلو ا۲ (ح − ا) لا + ب۲ (ح − ب) ء = (ح − ط) ط۲ پہلے جو مساوات حاصل ہوئی تہی اوسکو ب میں ضرب دو اور دوسرے مساوات حاصل شدہ کو تفریق کرو تو

(ح − ا) (ب − ا) ا لا = (ح − ط) (ب − ط) ط

ا(ب − ا) (ح − ا) لا = ط (ب − ط) (ح − ط) اور علی ہذالقیاس ء اور ی کی بابت عمل کرو

(۲۶) لا ء ی پر تقسیم کرو تو ۱/ا = ۱/لا − ۱/ء − ۱/ی اور علی ہذالقیاس ۱/ب = ۱/ء − ۱/ی − ۱/لا اور ۱/ح = ۱/ی − ۱/لا − ۱/ء ان دوم و سوم مساواتونکو جمع کرو تو ۱/ب + ۱/ح = −۲/لا

(۲۷) لا + ء + ی = ا + ب + ح

ب لا + ح ء + ا ی = ا² + ب² + ح²

ح لا + ا ء + ب ی = ا³ + ب³ + ح³

ی کی قیمت اول مساوات میں سے نکال کر دوسری اور تیسری مساوات میں رکھی تو

(ب − ا) لا + (ح − ا) ء = ب² + ح² − ا (ب + ح)

(ح − ب) لا + (ا − ب) ء = ا² + ب² − ب (ا + ح)

اول کو ب − ا میں اور دوم کو ح − ا میں ضرب دو اور جمع کرو تو

لا[(ب − ا)² + (ح − ا)(ح − ب)] = (ب − ا)(ب² + ح² − ا ب − ا ح) + (ح − ا)(ا² + ح² − ب ا − ب ح)

یعنی لا [ا² + ب² + ح² − ا ب − ب ح − ح ا]

= − ا³ + ب³ + ح³ − ۲ا²ب + ۲ا²ح − ۲ب²ا − ۲ح²ا − ا ب ح

اسواسطے تقسیم سے لا = ب + ح − ا اور علی ہذالقیاس ء اور ی کے واسطے

(۲۸) دونوں مساوات کو اول مساوات سے تفریق کرو تو −(ا − ب) ء + (ا² − ب²) ی = ا³ − ب³

ا − ب پر تقسیم کرو تو − ء + (ا + ب) ی = ا² + ا ب + ب² اب تیسری مساوات کو دوم مساوات سے تفریق کرو تو −(ب − ح) ء + (ب² − ح²) ی = ب³ − ح³ اب ب − ح پر تقسیم کرو تو

− ء + (ب + ح) ی = ب² + ب ح + ح² اب حاصل شدہ مساوات میں اس مساوات کو تفریق کرو تو (ا − ح) ی = ا² − ح² + ب (ا − ح)

ا − ح پر تقسیم کرو تو ی = ا + ح + ب

اسی معلوم ہوا کہ ء = (ب + ح)(ا + ح + ب) − ب² − ب ح − ح² اس سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

ء = اب + ب ح − ح ا ؛ اب ء اور ی کی قیمتون کو تینون مساواتون مین سے کسی ایک مساوات مین رکھو تو لا کی قیمت حاصل ہو جائیگی

تیرہوان باب

(۱) فرض کرو کہ کسر کے نسب نما کو ء اور شمار کنندہ کو لا تعبیر کرتا ہے تو بموجب شرائط سوال کے

(لا + ۳)/ء = ۱ اور لا/(ء + ۲) = ۱/۲

(۲) فرض کرو کہ زید کے پاس جو روپیہ تھا اُسکی تعداد کو لا اور دوسرے کے روپیہ کے تعداد کو ء تعبیر کرتا ہے تو

لا + ء = ۵۷۰ اور ۳لا + ۵ء = ۲۳۵۰

(۳) فرض کرو کہ شمار کنندہ کو لا اور نسب نما کو ء تعبیر کرتا ہے تو (لا + ۱)/ء = ۱/۳ اور لا/(ء + ۱) = ۱/۴

(۴) فرض کرو کہ لا اول عدد کو اور ء دوسرے عدد کو تعبیر کرتا ہے تو لا + ۴ء = ۲۹ اور ء + ۴لا = ۳۶

(۵) فرض کرو کہ موہن اور سوہن کے روپیونکی تعداد کو لا اور ء تعبیر کرتے ہین

لا + ۳۶ = ۳ء اور ء − ۵ = ۱/۲ لا

(۶) فرض کرو کہ موہن اور سوہن کے روپیونکی تعداد کو لا اور ء تعبیر کرتے ہین جب موہن ہارا تو

لا − ۱۰ = ۲ (ء + ۱۰) − ۲۵ اور جب سوہن ہاریگا تو ء − ۱۰ = ۵/۱۲ (لا + ۱۰)

(۷) فرض کرو کہ لا اول عدد اور ء دوسرے عدد کو تعبیر کرتا ہے تو

۲لا + ء = ۱۷ اور ۲ء + لا = ۱۹

(۸) فرض کرو کہ اول عدد کو لا اور دوسرے عدد کو ء تعبیر کرتا ہے لا/۲ + ۳ء/۴ = ۳لا − ء

اور ۳لا − ء = ۱۱

(۹) فرض کرو چاء لا روپیہ سیر اور قہوہ ء روپیہ سیر آیا تو ۳۲لا + ۱۵ء = ۱۰۵

اور ۳۶لا + ۹ء = ۱۰۵

(۱۰) فرض کرو کہ اعداد کو لا اور ء اور ی تعبیر کرتے ہین تو لا + ء + ی = ۹ اور

لا + ۲ء + ۳ی = ۲۲ اور لا + ۴ء + ۹ی = ۵۸

ریل کے کرایہ کا (۴۲ ی + ۲۵۶ ی/۳) شلنگ ہوا اور ۲۰ راس کے لیجانے مین بحساب اوسط چھ شلنگ خرچ پڑا تھا اسلئی ۱۲۰ شلنگ خرچ ہوا تھا تو ۴۲ ی + ۲۵۶ ی/۳ = ۱۲۰

(۱۹) فرض کرو کہ موہن نے لا بازیان اور سوہن نے ی بازیان جیتین

۲لا − ۳ی = ۳ اور ۲(لا − ۱) − ۵ (ی + ۱) = −۳۰

(۲۰) فرض کرو کہ ا اور ب اور س اور د اور ی پاس لا ر ی و و حصہ روپیہ تھا تو

لا + ر/۲ = ۳۰ اور ر − ی/۲ + ی/۳ = ۳۰ اور ی − ی/۴ + و/۴ = ۳۰

و − و/۴ + حصہ/۶ = ۳۰ اور حصہ − حصہ/۶ = ۳۰ آخر مساوات سے حصہ کو دریافت کرو اور و اور ی اور ر اور لا کو بہ ترتیب دریافت کرو

(۲۱) فرض کرو کہ فاصلہ لا میل ہے اور ڈاک گاڑی کی رفتار ی میل فی گھنٹہ ہے تو ریل کی ۱۲ میل فی گھنٹہ

پس (لا − ۱۵)/ی = لا/۱۲ + ۳ اور (لا/۲)/ی = (لا/۲)/(۳ی/۴) + ۳

(۲۲) فرض کرو کہ زید لا دن مین اور بکر ی دن مین کام کو بناتا ہے تو

۳۰/لا + ۳۰/ی = ۱ اور (۸ − ۱/۲ ۵ + ۳۰)/لا + (۴ − ۱/۲ ۵ + ۳۰)/ی = ۱

(۲۳) فرض کرو کہ زید لا منٹ مین اور بکر ی منٹ مین ایک میل مسافت طی کرتا ہے تو اول دفعہ مین بکر ۱۷۶۰ − ۴۴ گز مسافت ۵۱ سکنڈ مین زیادہ بہ نسبت زید کے طی کرتا ہے تو (۱۷۶۰ − ۴۴)/۱۷۶۰ ی = لا + ۵۱/۶۰ اور دوسرے صورت مین زید (۱۷۶۰ − ۸۸) گز کو ۱ منٹ ۶ سکنڈ مین بہ نسبت بکر کے کم وقت مین طی کرتا ہے تو

(۱۷۶۰ − ۸۸)/۱۷۶۰ لا = ی − ۱ ۱/۵

(۲۴) فرض کرو کہ پہاڑ کا فاصلہ جڑ سے چوٹی تک لا میل ہے اور فی گھنٹہ زید کے رفتار ی میل اور بکر کی رفتار ر میل ہے تو لا/ر وہ وقت ہے جسمین زید جڑ سے چوٹی پر چڑھ گیا تو لا/ر = لا/ی − ۱/۲ اور ۲/ی وہ وقت ہے جو زید کو راہ بھولنے مین ناحق لگا اسلئی لا/ر + ۲/ی = لا/ی − ۶/۶۰ اور اور نیز (لا − ۱/۲)/ر = لا/ی + ۱/۶۰ − ۲/۶۰ اب اول مساوات کو دوم سے تفریق کرو تو ی کی قیمت دریافت ہو جائیگی

(۲۹) فرض کرو کہ اگلے پہیہ کا محیط لا گز اور پچھلے کا ی گز ہے تو ۱۲۰/لا − ۱۲۰/ی = ۶

اور ۱۲۰/(۵لا/۴) − ۱۲۰/(۶ی/۵) = ۴

(۳۰) فرض کرو کہ دہائیوں کے تعداد کو لا اور اکائیوں کو ی تعبیر کرتا ہے تو عدد ۱۰لا + ی ہوگا تو

۱۰لا + ی = ۳(لا + ی) اور ۱۰لا + ی + ۴۵ = ۱۰ی + لا

(۳۱) فرض کرو کہ دہائیوں کی تعداد کو لا اور اکائیوں کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہے تو وہ عدد ۱۰لا + ی ہوگا

۱۰لا + ی = ۷(لا + ی) اور ۱۰لا + ی − ۲۷ = ۱۰ی + لا

(۳۲) فرض کرو کہ لا اور ب کی درمیان لا میل اور ب اور س کے درمیان ی میل اور س اور پ کے درمیان ی میل فاصلہ ہے اور ڈاک گاڑی و میل فی گھنٹہ جائے تو ۳و میل ریل گاڑی جائیگی

لا/و = ی/۳و + ی/۳و − ۱/۲ اسواسطے ۳لا = ی + ی − و

۲لا/و = ی/۳و + ی/۳و + ی/۳و اسواسطے ۶لا = ی + ۲ی

لا/و + ۱ = ی/۳و + (ی + ۱/۲ ی)/۳و اسواسطے ۶لا + ۶و = ۲ی + ۳ی

لا + ی + ی = ۶ ۷/۲

(۳۳) فرض کرو کہ چکر لا گز ہے اور زید کی اصل رفتار فی منٹ ی گز ہے اور بکر کی اصل رفتار فی منٹ ی گز

اب زید دو پورے چکر اور ۱۵۰ گز جتنی دیر میں طے کرتا ہے اتنی دیر میں بکر پورے دو چکر کرتا ہے

اسلئے (۲لا + ۱۵۰)/ی = ۲لا/ی اور دوسرے دوڑ میں زید ۴ی/۳ گز فی منٹ چار دفعہ چکر چلتا ہے اور بکر ۹ی/۸ کو فی منٹ ایک چکر میں اور دوسرے چکر میں ی کو فی منٹ اور تیسرے ۹ی/۱۰ کو فی منٹ چلتا ہے مگر اس چکر میں ۱۸۰ گز اوسے طے کرنے باقی رہجاتے ہیں اسلئے

۴لا/(۴ی/۳) = لا/(۹ی/۸) + لا/ی + (لا − ۱۸۰)/(۹ی/۱۰) یعنی ۳لا/ی = ۱/ی [۸لا/۹ + لا + ۱۰(لا − ۱۸۰)/۹]

اس مساوات کی ارقام اول مساوات پر تقسیم کرو تو ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۸لا/۱۸لا + لا/۲لا + ۱۰(لا − ۱۸۰)/۱۸

یعنی ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۴/۹ + ۱/۲ + ۵/۹ − ۱۰۰/لا

اسواسطے ۱۰۰/لا = ۳/۲ − ۳لا/(۲لا + ۱۵۰) = ۴۵۰/۲(۲لا + ۱۵۰)

اسواسطے ۱۴۰۰ لا + ۳۰۰۰۰ = ۴۵۰ لا اسواسطے لا = ۶۰

(۳۴) فرض کرو کہ گہوڑی کی رفتار فی گہنٹہ لا میل اور قاصد کی رفتار فی گہنٹہ ی میل ہی اور پہر بہی فرض کرو کہ ی گہنٹہ کے بعد پہر دونو ملے اور چونکہ آدمی ف گہنٹہ پہلے چل چکا ہی اسلئے

(ف + ی) ی = ی لا . . . . (۱)

اور بڑہی ہوئی چال سے گہوڑی کے ڈاک $\frac{۶ لا}{۵}$ (ی + ق) − $\frac{۵ ی}{۴}$ (ی + ق) = ۹۲ . . . (۲)

اور نیز (لا − ی) (ی + ق) = ۸۰ . . . (۳)

(۲) کو (۳) پر تقسیم کرو $\frac{\frac{۶ لا}{۵} - \frac{۵ ی}{۴}}{لا - ی} = \frac{۹۲}{۸۰}$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ لا = ۲ ی . . . (۴)

(۱) سے ی = ف اسواسطے اگر ف + ق = ۱۶ ہو تو (۳) سے

لا − ی = $\frac{۸۰}{۱۶}$ = ۵ اسسے اور (۴) سے ہم لا اور ی کو دریافت کرسکتے ہیں

چودہواں باب

(۱) ۳ا − [ب + [۲ا − (ب − ح)]] = ۳ا − [ب + ۲ا − ب + ح]

= ۳ا − ۲ا − ح = ا − ح اور $\frac{\frac{۱}{۲} - \frac{ح^۲}{۲}}{۱ + ح^۲} = \frac{۱ - ح^۲}{(۱ + ح^۲)۲} = \frac{۱ - ح^۲}{۲}$

ا − ح + $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱ - ح^۲}{۲}$ = ا − ح + $\frac{۱}{۲}$ + ح − $\frac{۱}{۲}$ = ا

(۲) ۳ $لا^۴$ + ۱۴ $لا^۳$ + ۲۲ $لا^۲$ + ۲۱) ۹ $لا^۵$ + ۱۰ $لا^۴$ + ۲ $لا^۳$ − ۲۰ لا − ۲۸ (۲ لا − ۶

۶ $لا^۵$ + ۲۸ $لا^۴$ + ۴۴ $لا^۳$ + ۴۲ لا

− ۱۸ $لا^۴$ − ۴۲ $لا^۳$ − ۶۲ لا − ۲۸

− ۱۸ $لا^۴$ − ۸۴ $لا^۳$ − ۱۳۲ لا − ۱۲۶

− ۴۲ $لا^۳$ − ۱۷۰ لا − ۹۸

− ۱۴ سے اسپر تقسیم کیا ۳ $لا^۲$ + ۵ لا + ۷) ۳ $لا^۴$ + ۱۴ $لا^۳$ + ۲۲ $لا^۲$ + ۲۱ (لا + ۳

۳ $لا^۴$ + ۵ $لا^۳$ + ۷ لا

۹ $لا^۳$ + ۱۵ لا + ۲۱

۹ $لا^۳$ + ۱۵ لا + ۲۱

۳ $لا^۲$ + ۵ لا + ۷ مقسوم علیہ اعظم

(۳) لا − ا = ا − $\frac{ا}{ا - ب}$ = $\frac{ا - ب}{ا - ب}$ ∴ $\frac{لا - ب}{ا - ب}$ = $\frac{ا}{ا - ب}$ اور

لا - ب = ا²/(ا - ب) - ب = (ا² - اب + ب²)/(ا - ب) ∴ (لا - ب)/ا = (ا² - اب + ب²)/(ا(ا - ب))

∴ جملہ مفروضہ کی قیمت = ا²/(ا(ا - ب)) - (ا² - اب + ب²)/(ا(ا - ب)) = (اب - ب²)/(ا(ا - ب)) = ب/ا

(۴) (ب - ج)/((ا - ب)(ا - ج)(ب - ج)) - (ا - ج)/((ا - ب)(ا - ج)(ب - ج)) + (ا - ب)/((ا - ب)(ا - ج)(ب - ج))

= (ب - ج - ا + ج + ا - ب)/((ا - ب)(ا - ج)(ب - ج)) = ۰

(۵) اول فرض کرو کہ م = ا تو (د(ا - ب)(ب - ج) + ب(ا - د)(ج - د))/(ج(ا - ب)(ا - د) + ا(ب - ج)(ج - د))

= (دا ب - دا ج - د ب² + د ب ج + ب ا ج - ب ا د - ب د ج + ب د²)/(ج ا² - ج ا د - ج ب ا + ج ب د + ا ب ج - ا ب د - ا ج² + ا ج د)

= ((ب - د)(ا ج - ب د))/((ا - ج)(ا ج - ب د)) = (ب - د)/(ا - ج)

دوم فرض کرو کہ م = ۲ تو بعد ضرب دینے کے یہہ حاصل ہوگا کہ

((ب - د)(ا ب ج + ا ج د - ا ب د - ب ج د))/((ا - ج)(ا ب ج + ا ج د - ا ب د - ب ج د))

(۶) (ا³ + ب³ + ج³ - ۳ا ب ج)/((ا - ب)² + (ب - ج)² + (ج - ا)²) = ((ا + ب + ج)[ا² + ب² + ج² - اب - اج - ب ج])/(۲[ا² + ب² + ج² - اب - اج - ب ج])

= (ا + ب + ج)/۲

(۷) لا/(۱ - لا²) + ے/(۱ - ے²) + ی/(۱ - ی²) = (لا(۱ - ے²)(۱ - ی²) + ے(۱ - ی²)(۱ - لا²) + ی(۱ - ے²)(۱ - لا²))/((۱ - لا²)(۱ - ے²)(۱ - ی²))

اس جملہ کا شمار کنندہ = لا + ے + ی - لا(ے² + ی²) - ے(ی² + لا²) - ی(لا² + ے²) + لا ے ی(ے ی + ی لا + لا ے)

اور چونکہ لا ے + ے ی + ی لا = ۱ تو

(لا + ے + ی)(لا ے + ے ی + ی لا) - لا(ے² + ی²) - ے(ی² + لا²) - ی(لا² + ے²) + لا ے ی ضرب دینے

۳ لا ے ی + لا ے ی یعنی ۴ لا ے ی حاصل ہوتا ہے

(۸) لا⁶ - ۶ لا⁵ ا + ۱۲ لا⁴ ا² - ۸ لا³ ا³ + لا⁶ - ۶ لا⁵ ب + ۱۲ لا⁴ ب² - ۸ لا³ ب³ =

۲[لا³ - ۳ لا²(ا + ب) + ۳ لا(ا + ب)² - (ا + ب)³]

اور سطح لا [۱۲ ا² + ۱۲ ب² - ۶(ا + ب)²] = ۸ ا³ + ۸ ب³ - ۲(ا + ب)³

یعنے ٦لا[ا^٢ - ٢اب + ب^٢] = ٦ا^٣ + ٦ب^٣ - ٦ا^٢ب - ٦اب^٢

یعنے لا[ا^٢ - ٢اب + ب^٢] = (ا + ب)(ا^٢ - ٢اب + ب^٢)

اسواسطے لا = ا + ب

(٩) لا + د + ی = ا + ب + ح

ب لا + ح د + ا ی = اب + ب ح + ح ا

ح لا + ا د + ب ی = اب + ب ح + ح ا

اول کو ا مین ضرب دو اور دوم کو ا سے تفریق کرو تو

(ا - ب) لا + (ا - ح) د = ا^٢ - ب ح

اور اول مساوات کو ب مین ضرب اور سوم کو تفریق کرو تو

(ب - ح) لا + (ب - ا) د = ب^٢ - ح ا

اب پہلی مساوات کو ب - ح مین اور دوسرے کو ا - ب مین ضرب دو اور جمع کرو تو

لا[(ا - ب)^٢ + (ا - ح)(ب - ح)] = (ا - ب)(ا^٢ - ب ح) + (ا - ح)(ب^٢ - ا ح)

یعنی لا[ا^٢ + ب^٢ + ح^٢ - اب - اح - ب ح] = ا(ا^٢ + ب^٢ + ح^٢ - اب - اح - ب ح)

اسواسطے لا = ا

(١٠) لا^٣ + ٦لا^٢ + ١١لا + ٦) لا^٣ + ٧لا^٢ + ١٤لا + ٨ لا

لا^٣ + ٦لا^٢ + ١١لا + ٦

لا^٢ + ٣لا + ٢) لا^٣ + ٦لا^٢ + ١١لا + ٦ لا

لا^٣ + ٣لا^٢ + ٢لا

٣لا^٢ + ٩لا + ٦

٣لا^٢ + ٩لا + ٦

اب اول دو جملون کا مقسوم علیہ اعظم لا^٢ + ٣لا + ٢ ہی اسیواسطے اوسکا ذو اضعاف اقل (لا + ٣)(لا^٣ + ٧لا^٢ + ١٤لا + ٨) یعنی لا^٤ + ١٠لا^٣ + ٣٥لا^٢ + ٥٠لا + ٢٤ ہے

اور یہہ تیسرے اور چوتھے جملون پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلئے یہی مقسوم علیہ اعظم ہے

پندرھواں باب

(۱) لا^۴ + ۲ لا^۳ − ۱۰ لا^۲ − ۱۱ لا − ۱۲) لا^۴ + ۳ لا^۳ − ۷ لا^۲ − ۲۱ لا − ۳۶ (۱

لا^۴ + ۲ لا^۳ − ۱۰ لا^۲ − ۱۱ لا − ۱۲

لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۱۰ لا − ۲۴

لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۱۰ لا − ۲۴) لا^۴ + ۲ لا^۳ − ۱۰ لا^۲ − ۱۱ لا − ۱۲ (لا − ۱

لا^۴ + ۳ لا^۳ − ۱۰ لا^۲ − ۲۴ لا

− لا^۳ + ۱۳ لا − ۱۲

− لا^۳ − ۳ لا^۲ + ۱۰ لا + ۲۴

۳ لا^۲ + ۳ لا − ۳۶

۳ پر تقسیم کیا تو لا^۲ + لا − ۱۲) لا^۳ + ۳ لا^۲ − ۱۰ لا − ۲۴ (لا + ۲

لا^۳ + لا^۲ − ۱۲ لا

۲ لا^۲ + ۲ لا − ۲۴

۲ لا^۲ + ۲ لا − ۲۴ — پس لا^۲ + لا − ۱۲ مقسوم علیہ اعظم ہوا

(۳) ۲/(۲ − ی) = ۲/(۲ − ۲/(لا − ۲)) = ۲(لا − ۲)/(۲ لا − ۴ − ۲) = (لا − ۲)/(لا − ۱)

۲/(۲ − ی) = ۲/(۲ − (لا − ۲)/(لا − ۱)) = ۲(لا − ۱)/(۲ لا − ۲ − لا + ۲) = ۲(لا − ۱)/لا

۲/(۲ − ی) = ۲/(۲ − ۲(لا − ۱)/لا) = ۲ لا/(۲ لا − ۲ لا + ۲) = ۲ لا/۲ = لا

(۴) جملہ کا نسب نما متحد کرو اور شمار کنندہ

= ص(ص − ب)(ص − ح) + ص(ص − ا)(ص − ح) + ص(ص − ا)(ص − ب) − (ص − ا)(ص − ب)(ص − ح)

= ص[۳ ص^۲ − ۲ص(ا + ب + ح) + ب ح + ح ا + ا ب] − [ص^۳ − ص^۲(ا + ب + ح) + ص(ا ب + ا ح + ح ا) − ا ب ح]

= ۲ ص^۳ − ص^۲ (ا + ب + ح) + ا ب ح = ا ب ح

(ص − ا)(ص − ب)(ص − ح)

(۵) دفعہ ۱۱ میں ثابت ہوا ہے کہ ہر ایک جملہ جو طا اور ص کا دفق ہے وہ د کا بھی دفق ہے پس اسے ثابت ہوا کہ کل دفقوں کا ذو ضعاف مشترک ہے۔ اور چونکہ د اوس جملہ کو پورا نہیں تقسیم کر سکتا جو اوسی اوتنے درجہ کا ہو اسلئے ذو ضعاف اقل تمام مقسوم علیہوں کا ہوا

(۶) ہر ایک طرف کے اجزاء ضربی کو باہمین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا⁴ − ۲۲ لا³ + ۱۶۴ لا² − ۴۵۸ لا + ۳۱۵

= لا⁴ − ۲۲ لا³ + ۱۶۴ لا² − ۴۸۸ لا + ۴۸۰

(۷) اول مساوات کو ح مین ضرب دیکے دوسری مساوات کو تفریق کرو تو

(ح − ا) لا + (ح − ب) ی = ۰

اسواسطے ی = (ح − ا) لا / (ب − ح) اول مساوات کو ب مین ضرب دو اور دوسرے کو تفریق کرو تو

(ب − ا) لا + (ب − ح) ى = ۰ اسواسطے ى = (ا − ب) لا / (ب − ح) تیسرے مساوات مین ی اور ى کی قیمتین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا { ب ح + ح (ح − ا) / (ب − ح) + ب (ا − ب) / (ب − ح) } + (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا) = ۰

پس اس سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا) / (ب − ح) = (ا − ب) (ب − ح) (ح − ا)

(۹) فرضکرو کہ بچے کیواسطے لا روپیہ اور بہائی کیواسطے ی روپیہ چہوڑ مرا تو

۵ لا + ۳ ی = ۱۱۲۶۷۰ اور لا − ۳ لا/۱۰۰ = ۲ (ی − ۳ ی/۱۰۰)

(۱۰) کسر دور کی (لا − ۱۳ ا) (لا + ۱۲ ا) (لا + ا) + ۲ (لا + ۱۶ ا) (لا + ۱۲ ا) (لا + ا) + ۳ (لا + ۱۶ ا) (لا − ا) (لا − ۱۳ ا)

= ۶ (لا + ۱۲ ا) (لا − ۱۳ ا) (لا + ۱۶ ا)

لا³ − ۷ ا² لا − ۶ ا³ + ۲ (لا³ + ۹۹ لا² + ۲۰ ا² لا + ۱۲ ا³) + ۳ (لا³ + ۱۴ ا لا² − ا² لا − ۱۸ ا³)

= ۶ (لا³ + ۱۵ ا لا² − ۱۲ ا² لا − ۳۶ ا³)

اسواسطے − ۱۲ ا² لا − ۳۶ ا³ = − ۷۲ ا² لا − ۲۱۶ ا³

اسواسطے ۶۰ لا = − ۱۸۰ ا، اسواسطے لا = − ۳ ا

سولہوان باب

اس باب کی ساری مثالین ضرب کے معمولی قاعدہ سے حل ہوجاتی ہین اسلئے شرح کی ضرورت نہین ہے

(۱۵) فرض کرو کہ $\sqrt{ا ب + ج^2 + \sqrt{(ا^2 - ج^2)(ب^2 - ج^2)}} = \sqrt{لا} + \sqrt{ی}$ تو

$لا + ی = ا ب + ج^2$ اور $2\sqrt{لا ی} = \sqrt{(ا^2 - ج^2)(ب^2 - ج^2)}$

$(لا - ی)^2 = (ا ب + ج^2)^2 - (ا^2 - ج^2)(ب^2 - ج^2) = ج^2(ا^2 + ب^2 + 2 ا ب)$

اسواسطے $لا - ی = ج(ا + ب)$ ∴ $\sqrt{لا} + \sqrt{ی} = \sqrt{\frac{(ا + ج)(ب + ج)}{2}} + \sqrt{\frac{(ج - ا)(ج - ب)}{2}}$

(۱۶) $\sqrt{15} + \sqrt{27} = \sqrt{3}(3 + \sqrt{5})$ اسواسطے $\sqrt{\sqrt{15} + \sqrt{27}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

اور $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ اسلئے جذر مطلوب $= \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

(۱۷) $6\sqrt{3} - 9 = \sqrt{3}(6 - 3\sqrt{3})$ اسواسطے $\sqrt{6\sqrt{3} - 9} = \sqrt[4]{3}\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

اور $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ∴ جذر مطلوب $= \sqrt[4]{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

(۱۸) $1 + (ج^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + (ج^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(ج^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}$ اسواسطے $\sqrt{1 + (ج^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} =$

$\sqrt{\frac{1 + (ج^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(ج^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}}$ اور $\sqrt{1 + (ج^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{ج + 1}{2}} + \sqrt{\frac{ج - 1}{2}}$ اسواسطے

جذر مطلوب $= \frac{1}{(ج^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}\left\{\sqrt{\frac{ج + 1}{2}} + \sqrt{\frac{ج - 1}{2}}\right\}$

(۱۹) $\sqrt{لا + 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$ اور یہہ برابر ہے $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{لا - 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$ اور یہہ برابر ہے $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 3} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 3} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{3 + \sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3} - 1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 3)}{(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 3)} = \frac{12 - 10\sqrt{3}}{6} = \frac{6 - 5\sqrt{3}}{3}$

(۲۰) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1 - \sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 3} + \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 3}$

$= \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 3) + (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9} = \frac{6}{6} = 1$

(۲۱) چار جذروں میں منفی کی علامت ہے اور دو میں مثبت کی علامت اس سبب سے ہم یہہ فرض کرتے ہیں

(۳۱) مجذور کرنے سے ا۲ (ب - لا) = ب۲ (ا - لا) اور (ا۲ - ب۲) لا = اب (ا - ب)

(۳۲) انتقال اور مجذور کرنے سے لا + ا = لا + ب - ۲ح (لا + ب)^۱/۲ + ح

۲√ح (لا + ب) = ب + ح - ا اور ۴ح (لا + ب) = (ب + ح - ا)۲

بیسواں باب

(۱۰) ۴لا۲ - ۴لا - ۳ = ۰ آگے عمل معمولی (۱۱) ۶لا۲ - ۱۸ = لا - ۱۳ آگے عمل معمولی

(۱۵) لا۲ - ۳لا + ۲ = ۹ آگے عمل معمولی (۱۶) ۳لا۲ - ۵لا + ۲ = ۱۴ آگے عمل معمولی

(۲۰) ۲لا۲ - ۹لا + ۱۰ = ۱۲لا - ۳۰ (۲۱) ۴لا۲ - ۱۲لا + ۹ = ۸لا

(۲۴) ۱۰۰لا۲ + ۱۹۶لا + ۷۳ = ۰

(۲۵) لا۲ - ۵/۶ + ۱/۶ + لا۲ - ۷/۱۲ + ۱/۱۲ = لا۲ - ۹لا/۲۰ + ۱/۲۰

(۲۶) ۶لا میں ضرب دو ۳لا۲ + ۱۲ = ۲لا۲ + ۱۸

(۲۷) ۲۵لا (لا + ۱) - ۱۵ (۲لا۲ + لا - ۱) = ۱۲ (لا + ۱)

(۳۰) لا (لا + ۵) + ۱۴۷ = ۲۳ (لا + ۵) (۳۱) ۱۴۷ - لا (۵ - لا) = ۲۳ (۵ - لا)

(۳۲) ۴ (لا۲ - ۱) میں ضرب دو تو ۲ (لا + ۱) + ۱۲ = لا۲ - ۱

(۳۳) ۸ (لا۲ - ۱) میں ضرب دو تو ۱۲ + ۲لا (لا - ۱) = ۳ (لا۲ - ۱)

(۳۴) ۱۹لا (۱۰ - لا) + ۴۰ × ۹۵ = ۹ (۱۰۰ - لا۲)

(۳۵) ۷۶لا (۱۰ + لا) + ۱۹۰ (۳لا - ۵۰) = ۳ (۱۰ + لا) (۱۲لا + ۷۰)

(۳۶) لا (لا۲ - ۵لا) = لا (لا۲ - ۹) + لا + ۳ اسواسطے - ۵لا۲ = - ۸لا + ۳

(۳۷) ۶لا (لا + ۲) - ۳ (لا - ۱) (لا - ۴) = ۱۴لا (لا - ۱)

(۳۸) ۲لا۲ = ۳لا (لا - ۱) + ۲ (لا - ۱)۲ باہم اسطرح عمل کریں کہ لا/(لا - ۱) کے جگہہ ر کہیں تو مساوات یہہ ہوجائیگی کہ ر = ۳/۲ + ۱/ر اسواسطے ر۲ = ۳/۲ ر + ۱ اس مساوات کو حل کرنے سے ر = ۲ یا - ۱/۲ کے حاصل ہوتا ہے اول قیمت کے موافق لا/(لا - ۱) = ۲ سے

لا = ۲ کے حاصل ہوتا ہے اور دوسری قیمت کے موافق لا/(لا−۱) = −۱/۲ اسسے لا = ۱/۳

اسی ترکیب کو ۳۹ و ۴۰ و ۴۱ و ۴۲ و ۴۶ و ۴۷ مثالوں مین کام لاؤ سے اختصار عمل ہو جاتا ہے

(۴۳) ۵(لا+۲) − ۱۰(لا−۲) = ۳(لا^۲ − ۴)

(۴۴) ۴(لا+۲)(لا+۳) + ۵(لا+۱)(لا+۳) = ۱۲(لا+۱)(لا+۲)

(۴۵) ۵لا(لا+۴) + ۳(لا+۲)(لا+۴) = ۱۴لا(لا+۲)

(۴۸) (لا+۳)(لا−۲)(لا−۱) + (لا−۳)(لا+۲)(لا−۱) = (لا+۲)(لا−۲)(۲لا−۳)

یا اسطرح کہ (لا+۳)/(لا+۲) = (لا+۲+۱)/(لا+۲) = ۱ + ۱/(لا+۲) اور اسی طرح اور کسروں کے صورت بنا کر ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱ + ۱/(لا+۲) + ۱ − ۱/(لا−۲) = ۲ − ۱/(لا−۱)۔ اسواسطے

۱/(لا+۲) − ۱/(لا−۲) = − ۱/(لا−۱)

(۵۰) ۴۹لا^۲ − ۲۸لا − ۲۱ = ۰

(۵۱) لا^۲ + (۲ − √۳)/(۷ − ۴√۳) لا = ۲/(۷ − ۴√۳) اب نسب نما کو منطق بنایا تو

لا^۲ + ((۲ − √۳)(۷ + ۴√۳))/(۴۹ − ۴۸) لا = (۲(۷ + ۴√۳))/(۴۹ − ۴۸)

یعنی لا^۲ + (۲ + √۳)لا = ۱۴ + ۸√۳ اب مجذور کامل ((۲ + √۳)/۲)^۲ طرفین پر زیادہ کرنے سے تو (لا + (۲ + √۳)/۲)^۲ = (۶۳ + ۳۶√۳)/۴ اسواسطے لا + (۲ + √۳)/۲ = ± (۶ + ۳√۳)/۲

(۵۲) لا^۲ − ۲الا + ا^۲ = ب^۲ یعنی (لا − ا)^۲ = ب^۲

(۵۳) لا^۲ − ۲الا = ب^۲ اسواسطے (لا − ا)^۲ = ا^۲ − ب^۲

(۵۴) ۲(ا^۲ − ب^۲) لا^۲ − ۴(ا^۲ + ب^۲)لا = ۲(ب^۲ − ا^۲) اسواسطے لا^۲ − (۲(ا^۲ + ب^۲))/(ا^۲ − ب^۲) لا = −۱ ((ا^۲ + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲))^۲ زیادہ کرو تو (لا − (ا^۲ + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲))^۲ = ((ا^۲ + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲))^۲ − ۱ = ۴ا^۲ب^۲/(ا^۲ − ب^۲)^۲

اسواسطے لا − (ا^۲ + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲) = ± ۲اب/(ا^۲ − ب^۲) اسواسطے لا = (ا^۲ ± ۲اب + ب^۲)/(ا^۲ − ب^۲) = (ا ± ب)^۲/(ا^۲ − ب^۲)

اگر اوپر کے علامت لیں تو لا = (ا + ب)/(ا − ب) اور اگر نیچے کے علامت لیں تو لا = (ا − ب)/(ا + ب)

(۵۵) (لا - ب) (لا - ج) + (لا - ا) (لا - ج) + (لا - ا) (لا - ب) = ۰ اسواسطے

۳ لا² - ۲ لا (ا + ب + ج) + ب ج + ج ا + ا ب = ۰

لا² - ۲ (ا + ب + ج)/۳ لا + ((ا + ب + ج)/۳)² = ((ا + ب + ج)/۳)² - (ب ج + ج ا + ا ب)/۳

(۵۶) (ا + ج) (ا + ب) + (لا - ب) (لا - ج) = (ا + ب) (لا - ب) + (ا + ج) (لا - ج)

لا² - ۲ لا (ا + ب + ج) + ا² + ب² + ج² + ۲ ب ج + ۲ ج ا + ۲ ا ب = ۰

اسواسطے (لا - ا - ب - ج)² = ۰ اسواسطے لا = ا + ب + ج

(۵۷) ا ب لا = ب لا (ا + ب + لا) + ا لا (ا + ب + لا) + ا ب (ا + ب + لا)

(ا + ب) لا² + (ا² + ۲ ا ب + ب²) لا + ا ب (ا + ب) = ۰

اسواسطے لا² + (ا + ب) لا = - ا ب

اسواسطے (لا + (ا + ب)/۲)² = ((ا + ب)/۲)² - ا ب = (ا - ب)²/۴

(۵۸) ا ب لا² - (ا² + ب²) لا = ج² - ا ب اور لا² - (ا² + ب²)/(ا ب) لا = (ج² - ا ب)/(ا ب)

(لا - (ا² + ب²)/(۲ ا ب))² = (ا² + ب²)²/(۴ ا² ب²) + (ج² - ا ب)/(ا ب) = ((ا² - ب²)² + ۴ ا ب ج²)/(۴ ا² ب²)

(۵۹) ا (لا - ب) (لا - ج) + ب (لا - ج) (لا - ا) = ۲ ج (لا - ا) (لا - ب)

(ا + ب - ۲ ج) لا² - [۲ ا ب - ج (ا + ب)] لا = ۰ اسواسطے لا = ۰ یا لا = (۲ ا ب - ا ج - ب ج)/(ا + ب - ۲ ج)

(۶۰) ا ب لا² + (۳ ا² + ب²)/ج لا = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/ج²

اسواسطے لا² + (۳ ا² + ب²)/(ا ب ج) لا = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/(ا ب ج²)

اسواسطے (لا + (۳ ا² + ب²)/(۲ ا ب ج))² = (۶ ا² + ا ب - ۲ ب²)/(ا ب ج²) + ((۳ ا² + ب²)/(۲ ا ب ج))² = (۹ ا⁴ + ۲۴ ا³ ب + ۱۰ ا² ب² - ۸ ا ب³ + ب⁴)/(۴ ا² ب² ج²)

اسواسطے لا + (۳ ا² + ب²)/(۲ ا ب ج) = ± (۳ ا² + ۴ ا ب - ب²)/(۲ ا ب ج)

(۶۱) کسر دور کرکے سادہ بناؤ تو

لا² (ا + ب + ج) - ۲ لا (ب ج + ج ا + ا ب) + ۳ ا ب ج = ۰

اسطرح عمل کرنا زیادہ فائدہ مند ہے کہ

اسواسطے $(19+8\sqrt{6})\,\text{لا}^2 + (34+12\sqrt{6})\,\text{لا} = 53+20\sqrt{6}$

اسواسطے $\text{لا}^2 + \frac{34+12\sqrt{6}}{19+8\sqrt{6}}\,\text{لا} = \frac{53+20\sqrt{6}}{19+8\sqrt{6}}$

اسواسطے $\text{لا}^2 + \frac{(19-8\sqrt{6})(34+12\sqrt{6})}{23}\,\text{لا} = \frac{(19-8\sqrt{6})(53+20\sqrt{6})}{23}$

یعنی $\text{لا}^2 + \frac{70-44\sqrt{6}}{23}\,\text{لا} = \frac{47-44\sqrt{6}}{23}$

مجذور پورا کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$\left(\text{لا} + \frac{70-44\sqrt{6}}{46}\right)^2 = \frac{12192-2112\sqrt{6}}{(46)^2} = \left(\frac{24-44\sqrt{6}}{46}\right)^2$

(۵۶) انتقال و مجذور سے $\text{لا}^2 + \text{ا لا} - 1 = (\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2 - 2(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})\sqrt{\text{لا}^2+\text{ب لا}-1} + \text{لا}^2 + \text{ب لا}$

اسواسطے $2\sqrt{\text{لا}^2+\text{ب لا}-1} = \sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}} - (\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})\,\text{لا}$

اسواسطے $\text{لا}^2\left[4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2\right] + 2(\text{ا}+\text{ب})\,\text{لا} = 4 + (\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2$

لا² کے امثال پر تقسیم کرو اور مجذور کو کامل بناؤ تو

$\left[\text{لا} + \frac{\text{ا}+\text{ب}}{4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2}\right]^2 = \frac{4+(\sqrt{\text{ا}}+\sqrt{\text{ب}})^2}{4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2} + \frac{(\text{ا}+\text{ب})^2}{\left[4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})^2\right]^2} = \frac{4+2\sqrt{\text{ا ب}}}{4-(\sqrt{\text{ا}}-\sqrt{\text{ب}})}$ [illegible]

(۵۷) $\text{لا}^3 + 2\,\text{لا}^2 + \text{لا} = 0$ اسواسطے $\text{لا} = 0$ اور $\text{لا}^2 + 2\,\text{لا} + 1 = 0$

(۵۸) $\text{لا}^3 + \text{ب لا}^2 + \text{ا لا} = 0$ اسواسطے $\text{لا} = 0$ اور $\text{لا}^2 + \text{ب لا} + \text{ا} = 0$

(۵۹) $\text{لا}^3 - \text{لا}^2(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) + \text{لا}(\text{ب ج}+\text{ج ا}+\text{ا ب}) = 0$

اسواسطے $\text{لا} = 0$ اور $\text{لا}^2 - \text{لا}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) = -(\text{ب ج}+\text{ج ا}+\text{ا ب})$

اسواسطے $\left[\text{لا} - \frac{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}{2}\right]^2 = -(\text{ب ج}+\text{ج ا}+\text{ا ب}) + \frac{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2}{4}$

(۶۰) $\frac{2\,\text{لا}}{1-\text{لا}^2} = \frac{4\,\text{لا}}{1+\text{لا}^2}$ اسواسطے $\text{لا}(1+\text{لا}^2) = 2\,\text{لا}(1-\text{لا}^2)$ اسواسطے $\text{لا} = 0$

یعنی $1 + \text{لا}^2 = 2(1-\text{لا}^2)$

(۶۱) $\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}+\text{ب}} + \frac{1}{\text{لا}-\text{ا}-\text{ب}} + \frac{1}{\text{لا}-\text{ا}+\text{ب}} + \frac{1}{\text{لا}+\text{ا}-\text{ب}} = 0$ اسواسطے

$\frac{2\,\text{لا}}{\text{لا}^2-(\text{ا}+\text{ب})^2} + \frac{2\,\text{لا}}{\text{لا}^2-(\text{ا}-\text{ب})^2} = 0$ اسلئے $\text{لا}\left[\text{لا}^2-(\text{ا}-\text{ب})^2\right] + \text{لا}\left[\text{لا}^2-(\text{ا}+\text{ب})^2\right] = 0$

اسواسطے $\text{لا} = 0$ اور $2\,\text{لا}^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 + (\text{ا}-\text{ب})^2$

(۶۲) (ا - لا)(لا + ا) = (لا - ن)(لا + م)(لا - م)(لا + ن)

اسواسطے - لا³ + لا²(ا + ن - م) + لا(م ن + م ا - ن ا) - ا م ن

= لا³ + لا²(ا - م + ن) + لا(ن ا - م ا - م ن) - ا م ن

اسواسطے لا = ۰ اور لا² = م ن + (م - ن) ا

(۶۳) ((ا + لا)/(ا - لا))² - ۱ = ح لا/(ا ب) اسواسطے ۴ ا لا/(ا - لا)² = ح لا/(ا ب)

اسواسطے ۴ ا² ب لا = ح لا (ا - لا)² اسواسطے لا = ۰ یعنی ۴ ا² ب = ح (ا - لا)²

(۶۴) انتقال اور مجذور کرنے سے (لا² + ۱)² + ۲لا(۲لا + ۱)√(لا²(لا² + ۲)) + لا²(لا² + ۲)

= (لا + ۱)²(لا² + ۲لا + ۳) اسواسطے

۲لا(۲لا + ۱)√(لا² + ۲) = ۴لا³ + ۲لا² + ۴لا + ۲ = ۲(لا² + ۱)(۲لا + ۱) اسواسطے

(۲لا + ۱)[لا√(لا² + ۲) - (لا² + ۱)] = ۰

اسواسطے کیا تو ۲لا + ۱ = ۰ یا لا√(لا² + ۲) - (لا² + ۱) = ۰ اول مساوات لا = -½

اور آخر سے لا²(لا² + ۲) = (لا² + ۱)² یعنے

لا⁴ + ۲لا² = لا⁴ + ۲لا² + ۱ یہہ ناممکن ہے

(۶۵) لا² - ۲لا + ۲ - ۲√(لا² - ۲لا + ۲) + ۱ = ۰ جذر

√(لا² - ۲لا + ۲) - ۱ = ۰ اسواسطے √(لا² - ۲لا + ۲) = ۱ مجذور کرنے

(۶۶) لا² + ۵لا + ۲۸ - ۵√(لا² + ۵لا + ۲۸) = ۲۴ اسواسطے

[√(لا² + ۵لا + ۲۸) - ۵/۲]² = ۲۴ + ۲۵/۴ = ۱۲۱/۴ اسواسطے √(لا² + ۵لا + ۲۸) = ۵/۲ ± ۱۱/۲

(۶۷) لا² - ۲لا + ۹ - ۲√(لا² - ۲لا + ۹) = ۳ اسواسطے (√(لا² - ۲لا + ۹) - ۱)² = ۴

(۶۸) ۳(لا² + ۵لا + ۱) - ۲√(لا² + ۵لا + ۱) = ۵

لا² + ۵لا + ۱ - ۲/۳√(لا² + ۵لا + ۱) + ۱/۹ = ۵/۳ + ۱/۹ = ۱۶/۹

√(لا² + ۵لا + ۱) - ۱/۳ = ± ۴/۳

(۶۹) لا^{۲} + ۳لا + √(لا^{۲} + ۳لا) = ۱۰ اس واسطے [√(لا^{۲} + ۳لا) + ۳/۲]^{۲} = ۹/۴ + ۱۰

(۷۰) ۲لا^{۲} − ۳لا + ۲ − ۲√(۲لا^{۲} − ۳لا + ۲) + ۱ = ۰ یعنے (√(۲لا^{۲} − ۳لا + ۲) − ۱)^{۲} = ۲

(۷۱) ۲لا^{۲} + ۶لا + ۵ + ۶√(۲لا^{۲} + ۶لا + ۵) = ۵۵ اس واسطے [√(۲لا^{۲} + ۶لا + ۵) + ۳]^{۲} = ۶۴

(۷۲) ۳لا^{۲} − ۲الا + ۴ − ۶√(۳لا^{۲} − ۲الا + ۴) = ا^{۲} + ۲ا − ۸

اس واسطے [√(۳لا^{۲} − ۲الا + ۴) − ۳]^{۲} = (ا + ۱)^{۲}

(۷۳) ۲لا^{۲} − ۳لا + ۲ + ۶√(۲لا^{۲} − ۳لا + ۲) = ۱۶ اس واسطے [√(۲لا^{۲} − ۳لا + ۲) + ۳]^{۲} = ۲۵

(۷۴) ۹ = ۵ + ۴(لا + لا^{۲}) − (لا + لا^{۲})^{۲} بجای لا + لا^{۲} کے ی رکھو تو

ی^{۲} − ۴ی + ۴ = ۰ اس واسطے ی = ۲ اور لا^{۲} + لا = ۲

(۷۵) (لا + ا)(لا + ۲ا)(لا + ۳ا)(لا + ۴ا) = ج^{۴} یعنے

(لا^{۲} + ۵الا + ۴ا^{۲})(لا^{۲} + ۵الا + ۶ا^{۲}) = ج^{۴} بجای لا^{۲} + ۵الا کے ی رکھو تو

(ی + ۴ا^{۲})(ی + ۶ا^{۲}) = ج^{۴} اس واسطے ی^{۲} + ۱۰ا^{۲}ی + ۲۵ا^{۴} = ج^{۴} + ا^{۴}

(۷۶) ۱۶لا(لا + ۳)(لا + ۱)(لا + ۲) = ۹ یعنی ۱۶(لا^{۲} + ۳لا)(لا^{۲} + ۳لا + ۲) = ۹

بجای لا^{۲} + ۳لا کے ی رکھو تو ۱۶ی(ی + ۲) = ۹

(۷۷) (ا^{۲} + لا^{۲})/(الا) = (ا^{۲} + لا^{۲})/(ا^{۲} − لا^{۲}) (جبر مقابلہ کا صفحہ دیکھو) (ا^{۲} + لا^{۲})(ا^{۲} − لا^{۲} − الا) = ۰

یعنی ا^{۲} + لا^{۲} = ۰ یا ا^{۲} − لا^{۲} − الا = ۰ اول مساوات سے ناممکن قیمت حاصل ہوتی ہے

لا^{۲} + الا = ا^{۲} اس واسطے لا^{۲} + الا + ا^{۲}/۴ = ۵ا^{۲}/۴

(۷۸) (لا − ۱/۲ + ۱/۲)^{۴} + (لا − ۱/۲ − ۱/۲)^{۴} = ا بجای لا − ۱/۲ کے ی رکھو تو

(ی + ۱/۲)^{۴} + (ی − ۱/۲)^{۴} = ا اس واسطے ۲ی^{۴} + ۳ی^{۲} + ۱/۸ = ا

اس واسطے ی^{۴} + ۳ی^{۲}/۲ + ۹/۱۶ = ا/۲ − ۱/۱۶ + ۹/۱۶ = ا/۲ + ۱/۲

(۷۹) لا^{۴} − ۲لا^{۳} + لا^{۲} − لا^{۲} + لا = ا یعنی (لا^{۲} − لا)^{۲} − (لا^{۲} − لا) = ا بجای لا^{۲} − لا کے ی رکھو تو

ی^{۲} − ی = ا

تو لا² + ۱۱ = ۰ اسسے لا کے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۹۵) ظاہر ہے کہ لا = ۵ ایک مساوات کا حل ہے ضرب دینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا³ − ۶ لا² + ۱۱ لا − ۳۰ = ۰ اور ہم کو معلوم ہے کہ ۵³ − ۶ × ۵² + ۱۱ × ۵ − ۳۰ = ۰
تفریق کرنے سے لا³ − ۵³ − ۶ (لا² − ۵²) + ۱۱ (لا − ۵) = ۰ لا − ۵ پر تقسیم کرو تو
لا² + ۵ لا + ۲۵ − ۶ (لا + ۵) + ۱۱ = ۰ اسسے لا کے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۹۶) لا (۶ لا² − ۵ لا + ۱) = ۰ اسواسطے کیا لا = ۰ یا ۶ لا² − ۵ لا + ۱ = ۰

(۹۷) لا² (لا + ۱) − ۴ (لا + ۱) = ۰ اسواسطے (لا² − ۴) (لا + ۱) = ۰ کیا لا + ۱ = ۰ یا لا² − ۴ = ۰

(۹۸) یہہ ظاہر ہے کہ لا = ا ایک حل مساوات ہے لا/ا − ۱ + ب/لا − ب/ا + ب²/لا² − ب²/ا² = ۰
[لا − ا] [۱/ا − ب/ا لا − ب² (لا + ا)/ا² لا²] = ۰ تقسیم لا − ا پر کرو تو
۱/ا − ب/ا لا − ب² (لا + ا)/ا² لا² = ۰ اسواسطے
ا لا² − ا ب لا − ب² لا − ب² ا = ۰ اسواسطے
لا² − ب (ا + ب)/ا لا + [ب (ا + ب)/۲ ا]² = ب² + [ب (ا + ب)/۲ ا]² = ب² (ب² + ۲ ا ب + ۵ ا²)/۴ ا²

(۹۹) ۸ لا³ − ۱ + ۸ (۲ لا − ۱) = ۰ اسواسطے [۲ لا − ۱] [۴ لا² + ۲ لا + ۹] = ۰
کیا ۲ لا − ۱ = ۰ یا ۴ لا² + ۲ لا + ۹ = ۰ اس آخر مساوات سے ناممکن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(۱۰۰) لا² − ۴/۹ = ۱/لا [لا + ۲/۳] پس (لا + ۲/۳) [لا − ۲/۳ − ۱/لا] = ۰
اسواسطے لا + ۲/۳ = ۰ یعنی لا − ۲/۳ − ۱/لا = ۰ اس آخر مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا² − ۲ لا/۳ = ۱ اسواسطے (لا − ۱/۳)² = ۱ + ۱/۹

(۱۰۱) ۳ (لا³ − ۱) + ۸ لا² (لا − ۱) = ۰ اسواسطے (لا − ۱) [۳ (لا² + لا + ۱) + ۸ لا²] = ۰
اسواسطے کیا تو لا − ۱ = ۰ یا ۱۱ لا² + ۳ لا + ۳ = ۰

(۱۰۲) ظاہر ہے کہ لا = − م ایک حل ہے
لا³ − م لا² − ۲ (م² + ۱) لا − ۲ م = ۰ اور یہہ ہم کو معلوم ہے کہ

م³ − م² + ۲ (م² + ۱) م − ۲ م = ۰ تفریق کرنے سے

(لا³ − م³) − م (لا² − م²) − ۲ (م² + ۱) (لا + م) = ۰

لا + م پر تقسیم کرو تو لا² − م لا + م² − م (لا − م) − ۲ (م² + ۱) = ۰

اسواسطے لا² − ۲ م لا = ۲ اسواسطے (لا − م)² = م² + ۲

(۱۰۳) لا = ا ظاہر ہے ضرب دو اور ب − ا پر تقسیم کرو تو

لا³ − (ا² + اب + ب²) لا + اب (ا + ب) = ۰ اور ہم یہہ بھی جانتے ہیں کہ

ا³ − (ا² + اب + ب²) ا + اب (ا + ب) = ۰ تفریق کرو تو

لا³ − ا³ − (ا² + اب + ب²) (لا − ا) = ۰ تقسیم لا − ا پر کرو تو

لا² + ا لا + ا² − (ا² + اب + ب²) = ۰

(۱۰۴) لا (لا² + ع لا + ع − ۱) + (لا + ع − ۱)/(ع − ۱) = ۰

لا [لا² − ۱ + ع (لا + ۱)] + (لا + ع − ۱)/(ع − ۱) = ۰

لا (لا + ۱) [لا − ۱ + ع] + (لا + ع − ۱)/(ع − ۱) = ۰ اسواسطے

لا + ع − ۱ = ۰ اور لا² + لا + ۱/(ع − ۱) = ۰

(۱۰۵) لا [(ع − ۱)² لا² + ع لا + ۱/(ع − ۱)] + (ع − ۱) لا + ۱ = ۰

اسواسطے لا [(ع − ۱)² لا² − ۱ + ع لا + ۱ + ۱/(ع − ۱)] + (ع − ۱) لا + ۱ = ۰

اسواسطے لا [(ع − ۱)² لا² − ۱ + (ع (ع − ۱) لا + ع)/(ع − ۱)] + (ع − ۱) لا + ۱ = ۰

اسواسطے (ع − ۱) لا + ۱ = ۰ یا لا [(ع − ۱) لا − ۱] + ع لا/(ع − ۱) + ۱ = ۰

بائیسواں باب

(۱۰) برابر قیمتوں کے ہونے واسطے ب² = ۴ ا ج ہوتا ہے اسلئے ۸² = ۸ × م اسواسطے م = ۸

(۱۱) س/ص + ص/س = (س² + ص²)/(س ص) = ((س + ص)² − ۲ س ص)/(س ص) = (ع² − ۲ ق)/ق

س³ + ص³ = (س + ص)³ − ۳ س ص (س + ص) = ع³ − ۳ ع ق

(۱۲) ۱/س + ۱/ص = (س + ص)/(س ص) = −ب/ا ÷ ج/ا = −ب/ج اور ۱/س × ۱/ص = ۱/(س ص) = ا/ج

پس مساوات $لا^2 + \frac{ب}{ح} لا + \frac{ا}{ح} = ۰$

(۱۳) قیمتیں $\frac{-ع \pm \sqrt{ع^2 - ۴ق}}{۲}$ میں اور $ع^2 - ۴ق = (ک + \frac{ق}{ک})^2 - ۴ق$
$= ک^2 + ۲ق + \frac{ق^2}{ک^2} - ۴ق = (ک - \frac{ق}{ک})^2$ یہہ مجذور کامل ہے

(۱۴) فرض کرو لا قیمت مشترک دونو مساواتوں $الا^2 + ب لا + ح = ۰$ اور $اَلا^2 + بَ لا + حَ = ۰$ کی ہو
تو اول مساوات کو حَ میں اور دوسری مساوات کو ح میں ضرب دو اور تفریق کرو تو

$(احَ - اَح) لا^2 + (بحَ - بَح) لا = ۰$ اسواسطے $(احَ - اَح) لا = بَح - بحَ$ ...(۱)

اور پہر اول کو اَ اور دوسری کو ا میں ضرب دو اور تفریق کرو تو

$(اَب - ابَ) لا + اَح - حاَ = ۰$ اسواسطے $(اَب - ابَ) لا = احَ - اَح$ ...(۲)

(۱) اور (۲) میں ضرب چلیپائی لگاؤ تو $(احَ - اَح)^2 = (اَب - ابَ)(بَح - بحَ)$

(۱۵) فرض کرو کہ $\frac{۲لا - ۷}{لا^2 - ۲لا - ۵} = ی$ تو $لا = \frac{ی + ۱ \pm \sqrt{(ی+۱)^2 - (ی-۱)(۷ی-۱)}}{ی}$ موافق دفعہ ۲۲۵ کے
ظاہر ہے کہ ا اور $\frac{۱}{۷}$ کے درمیان ی نہ واقع ہو تو لا کے نفس الامری قیمت نہیں ہو سکتی ہے

(۱۶) $\frac{لا^2 - ۲لا + ع^2}{لا^2 + ۲لا + ع^2} = ی$ فرض کرو تو $لا = \frac{-(ی+۱) \pm \sqrt{(ی+۱)^2 - ع^2(ی-۱)^2}}{ی - ۱}$
پس علامت جذر کی نیچے یہہ جملہ واقع ہے $(۱ - ع^2)(ی - \frac{ع - ۱}{ع + ۱})(ی - \frac{ع + ۱}{ع - ۱})$ اور بموجب فرض کے $۱ - ع^2$ منفی ہے اسواسطے دوسرا جز بہی منفی ہونا چاہئے تاکہ لا کے نفس الامری قیمت ہو
اسلئے ی $\frac{ع - ۱}{ع + ۱}$ اور $\frac{ع + ۱}{ع - ۱}$ کے درمیان رہنا چاہئے

تیئیسواں باب ۲۳

(۱) دوسرے مساوات کو ۲ میں ضرب دیکر پہلی مساوات کے ساتھہ جمع کرلو

(۲) اول مساوات سے $ی = ۱۰۰ - لا$ اس قیمت کو دوسرے مساوات میں رکھہ لو۔

(۳) دوسرے مساوات $لا + ی = لا ی$ حاصل ہوتا اسواسطے $۴ = لا ی$ اسکی وات میں ی کی جگہہ $۴ - لا$ لکھو

(۴) اول مساوات سے $ی = ۷ - لا$ اسکو دوسرے مساوات میں رکھو

(۵) اول مساوات سے ی = لا - ۱۲ اسکو دوسرے مساوات مین رکہو

(۶) اول مساوات سے لا + ی = ۸ اور دوسرے مساوات سے ی لا - ی = ۲ + ۲ لا اسمین ی = ۸ - لا رکہو

(۷) لا² + ۲ لا ی + ی² = ۶۵ + ۵۶ = ۱۲۱ یعنے (لا + ی)² = ۱۲۱ اور

لا² - ۲ لا ی + ی² = ۶۵ - ۵۶ = ۹ یعنے (لا - ی)² = ۹

(۸) دوسرے مساوات سے لا = (۲ + ۵ی)/۳ اسکو اول مساوات مین رکہو

(۹) اول مساوات سے لا + ی = ۲ لا ی اسواسطے ۱ = لا ی اسمین ی کے جگہہ ۲ - لا رکہو

(۱۰) اول مساوات کو ۲ مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو تفریق کرو

(۱۱) ۲ لا + ۳ ی = ۳۷ اور ۴۷ (لا + ی) = ۱۴ لا ی اول مساوات سے

لا = (۳۷ - ۳ی)/۲ اسکو دوسرے مساوات مین مندرج کرو

(۱۲) دونو مساواتون کو جمع کرکے جذر نکال لو یا ی = ن لا کی رکہو تو (۴ن² + ن)/(۱ + ۳ن) = ۱۱۵/۵۴ اسسے معلوم ہوا کہ ن = ۵/۳ یا -۲۳/۲۴

(۱۳) ی = ن لا کے رکہو تو (ن - ن²)/(۱ + ن) = ۲/۱۵ اسسے معلوم ہوا کہ ن = ۲/۳ یا ۱/۵

(۱۴) ی = ن لا کے رکہو تو (۴ن² + ن + ۱)/(۸ن² + ۳) = ۶/۱۴ اسسے ن = ۱/۲ یا -۲

(۱۵) ی = ن لا رکہو تو (ن - ۲ن²)/(۱ + ن) = ۱/۱۲ اسسے ن = ۱/۸ یا ۱/۳

(۱۶) ی = ن لا کے رکہو تو (ن² - ن + ۱)/(ن² - ۲ن) = - ۲۱/۱۵ اسسے ن = ۵/۴ یا ۱/۳

(۱۷) ی = ن لا کے رکہو تو (۱ - ۴ن²)/(۲ن² + ۲ن) = ۹/۳ یعنے ((۱ + ۲ن)(۱ - ۲ن))/(ن(۱ + ۲ن)) = ۳

اسواسطے (۱ - ۲ن)/ن = ۳

(۱۸) دوسرے مساوات سے ی = (۷ - ۵لا)/۲ اسکو اول مساوات مین رکہو

(۱۹) دوسرے مساوات سے ی = ۲ - لا اسکو مساوات اول مین رکہو

(۲۰) (لا + ی)² + (لا - ی)² = ۱۰/۳ (لا² - ی²) اسواسطے ۶ (لا² + ی²) = ۱۰ (لا² - ی²)

اسواسطے ۴ لا² = ۱۶ ی² اسواسطے لا = ± ۲ ی

(۲۱) (لا + ی)۲ + (لا − ی)۲ = ۵/۲ (لا۲ − ی۲) اسواسطے ۴ (لا۲ + ی۲) = ۵ (لا۲ − ی۲)
اسواسطے لا۲ = ۹ ی۲ اور لا = ± ۳ ی

(۲۲) ی/۲ + لا/۸ = ی − لا اور ی − لا/۲ = ۳/۴ لا ی − ۳ لا
اول مساوات سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ی = ۵ لا/۴ اسکو دوسرے مساوات میں رکھو

(۲۳) ۳ لا/۱۰ + ی/۸ = ۳ لا − ی اور ۳ لا − ی/۲ = ۹ لا ی/۴ + ۳ ی اول مساوات
سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ی = ۱۲ لا/۵ اور اسکو دوسرے مساوات میں رکھو

(۲۴) اول مساوات کو ۴ میں ضرب دو اور دوسرے مساوات کو جمع کرو تو ۹ ی۲ − ۵۴ لا ی + ۸۱ لا۲ = ۰
اسیواسطے (ی − ۳ لا)۲ = ۰ اور ی = ۳ لا

(۲۵) اول مساوات کو دوسرے مساوات سے تفریق کرو ۲ (ی − لا) = (ی۲ − لا۲) اسواسطے
(ی − لا) (ی + لا − ۲) = ۰ اسواسطے ی − لا = ۰ یا ی + لا − ۲ = ۰
پس ی = لا یا ی = ۲ − لا معلوم مساواتوں میں سے کسی مساوات میں رکھو

(۲۶) دوسرے مساوات کا مجذور کر لیا تو لا۲ − ۲ لا ی + ی۲ = لا۲ ی۲/۱۶ اور اول مساوات کو تفریق کرو تو
۵/۲ لا ی − ۲ لا ی = لا۲ ی۲/۱۶ اسواسطے لا۲ ی۲ = ۸ لا ی اسواسطے لا ی = ۰ یا ۸
اول قیمت سے لا۲ + ی۲ = ۰ اور لا − ی = ۰ حاصل ہوتا ہے اسسے لا = ۰ اور ی = ۰ اور
دوسرے قیمت لا۲ + ی۲ = ۲۰ اور لا − ی = ۲ کے حاصل ہوتا ہے

(۲۷) ۳ لا/ی = ۱۶ − لا − ۲ ی اور ۳ لا/ی = ۲۳ − ۳ لا − ی اسواسطے
۱۶ − لا − ۲ ی = ۲۳ − ۳ لا − ی اسواسطے ی = ۲ لا − ۷ اسکو دونو مساواتوں میں سے کسی مساوات میں رکھو

(۲۸) لا ی = ۲/۳ (لا + ۱) اسواسطے ۲ لا ی = ۵/۳ (لا + ی) اسکو دوسرے مساوات کے ساتھہ جمع کرو
(لا + ی)۲ − ۵/۳ (لا + ی) = ۲۶ اسواسطے (لا + ی − ۵/۶)۲ = ۲۶ + ۲۵/۳۶ = ۹۶۱/۳۶ اسواسطے
لا + ی − ۵/۶ = ± ۳۱/۶ اسواسطے لا + ی = ۶ یا − ۱۳/۳ اسکو اول مساوات میں رکھو

(۲۹) (لا۳ − ی۳)/(لا − ی) = ۵۶/۲ یعنی لا۲ + لا ی + ی۲ = ۲۸ اسمین ی کے جگہہ لا − ۲ رکھو

(۳۰) (لا³ + ی³)/(لا + ی) = ۶۵/۵ یعنی لا² − لا ی + ی² = ۱۳ اسمین ی کے جگہہ ۵ − لا رکھو

(۳۱) (لا³ + ی³)/(لا + ی) = ۱۰۰۱/۱۱ یعنی لا² − لا ی + ی² = ۹۱ اسمین ی کے جگہہ ۱۱ − لا رکھو

(۳۲) (لا³ + ی³)/(لا ی (لا + ی)) = ۳۵/۳۰ یعنی (لا² − لا ی + ی²)/(لا ی) = ۷/۶ اسمین ی = ن لا کے رکھو تو
(۱ − ن + ن²)/ن = ۷/۶ اسواسطے ن = ۳/۲ یا ۲/۳ یا اسکو اسطرح حل کرو کہ اول
مساوات کے سہ چند کو دوسرے مساوات کے ساتھہ جمع کرکے جذر لکعب لو تو لا + ی = ۵
اور لا ی = ۶

(۳۳) لا² + ی² = ۱۸ لا ی اور لا + ی = ۱۲ اسواسطے تقسیم کرنے سے لا² − لا ی + ی² = ۳ لا ی/۲
اسمین ی = ن لا کے رکھو تو ۱ − ن + ن² = ۳ن/۲ اسکے واسطے ن = ۲ یا ۱/۲

(۳۴) (لا³ + ی³)/(لا + ی) = ۴۹۱۴/۱۸ یعنی لا² − لا ی + ی² = ۲۷۳ اسمین ی کے جگہہ ۱۸ − لا رکھو

(۳۵) ی³ + لا³ = ۹ لا ی اور لا + ی = ۳/۴ لا ی تقسیم کرنے سے لا² − لا ی + ی² = ۱۲
اور دوسرے مساوات کے مجذور کرنے سے ۹ لا² ی²/۱۶ − ۳ لا ی = ۱۲ حاصل ہوتا ہے
اسسے لا ی = ۸ یا − ۸/۳ کے حاصل ہوتا ہے

(۳۶) لا² (لا + ی) = لا² (۲ لا − ۳ ی) اسواسطے لا + ی = ۲ لا − ۳ ی اسواسطے لا = ۴ ی
معلوم مساواتون مین سے کسے ایک مساوات مین اسکو رکھو

(۳۷) لا ی (لا + ی) = ۲۰ اور لا + ی = ۵/۴ لا ی ضرب دو تو ۵/۴ لا² ی² (لا + ی) = ۲۰ (لا + ی)
اسواسطے لا² ی² = ۱۶ اسواسطے لا ی = ±۴ اسکو اول مساوات مین رکھو

(۳۸) (لا³ + ی³)/(لا² − لا ی + ی²) = (۶ لا ی − ۱)/۷ یعنی لا + ی = (۶ لا ی − ۱)/۷ اسکو مجذور کرو تو
لا² + ی² + ۲ لا ی = (۶ لا ی − ۱)²/۴۹ اسواسطے ۷ + ۳ لا ی = (۶ لا ی − ۱)²/۹ اور
۱۲ لا² ی² − ۵۳ لا ی − ۱۱۴ = ۰ اس مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا ی = ۶ یا −۱۹/۱۲
اسکو مساوات لا + ی = (۶ لا ی − ۱)/۷ مین رکھو

(۳۹) لا² + ی² = لا² ی²/۲ اسواسطے ۸ = لا² ی²/۲ اسواسطے ۱۶ = لا² ی² اسمین ی کے جگہہ ۸ − لا² رکھو

(۴۰) لا+ی=۴ مجذور کرو تو لا۲+ی۲=۱۶−۲لای پھر مجذور کرو تو
لا۴+ی۴+۲لا۲ی۲=۲۵۶−۶۴لای+۴لا۲ی۲ اسیواسطے
۸۲+۲لا۲ی۲=۲۵۶−۶۴لای+۴لا۲ی۲ پس لا۲ی۲−۳۲لای=−۸۷
اسواسطے لای=۳ یا ۲۹ اسکو معلوم مساواتون مین کام میں لاؤ

(۴۱) (لا۵−ی۵)/(لا−ی)=۳۰۹۳/۳ یعنی لا۴+لا۳ی+لا۲ی۲+لای۳+ی۴=۱۰۳۱ یعنے
لا۴+ی۴+لای(لا۲+ی۲)+لا۲ی۲=۱۰۳۱ اب لا−ی=۳ اسواسطے
لا۲+ی۲=۹+۲لای اسواسطے لا۴+ی۴=(۹+۲لای)۲−۲لا۲ی۲
=۸۱+۳۶لای+۲لا۲ی۲ اسکو اوپر کی مساوات مین مندرج کرو تو
۸۱+۳۶لای+۲لا۲ی۲+لای(۹+۲لای)+لا۲ی۲=۱۰۳۱ یعنی
۵لا۲ی۲+۴۵لای=۹۵۰ اسواسطے لای=۱۰ یعنی −۱۹ اب اسکو دوسرے مساوات مین کام مین لاؤ

(۴۲) ((۳لا−۳ی)/(لا+ی))۲+((۳لا+۳ی)/(لا−ی))۲=۸۲ بجای (لا−ی)/(لا+ی) کے ع رکھو تو
۹ع۲+۹/ع۲=۸۲ اسواسطے ۹ع۴−۸۲ع۲+۹=۰ اسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے
ع۲=۹ یا ۱/۹ اسواسطے (لا−ی)/(لا+ی)=±۱/۳ یا ±۳ اور (لا−ی)/(لا+ی)=+۱/۳ کے لو تو
۳(لا−ی)=لا+ی اسواسطے لا=۲ی اسکو دوسرے مساوات معلوم مین رکھو

(۴۳) لا+ی=۴+لای اسواسطے لا۲+ی۲=(۴+لای)۲−۲لای=۱۶+۶لای+لا۲ی۲
اسکو اول مساوات مین رکھو تو ۱۶+۶لای=۱۹ اسواسطے لای=۱/۲ اسکو دوسرے مساوات مین کام مین لاؤ

(۴۴) (لا۴+لا۲ی۲+ی۴)/(لا۲−لای+ی۲)=۳۵۷/۳ یعنی لا۲+لای+ی۲=۱۱۹ اس مساوات اور مساوات اول
کی جمع اور تفریق کرنے سے لا۲+ی۲=۱۳ اور لای=۶ کے حاصل ہوتا ہے

(۴۵) (لا۴+لا۲ی۲+ی۴)/(لا۲+لای+ی۲)=۹۳۱/۴۹ یعنی لا۲−لای+ی۲=۱۹ اس مساوات اور اول مساوات سے
لا۲+ی۲=۳۴ اور لای=۱۵ حاصل ہوتا ہے

(۴۶) دوسرے مساوات کی دوچند کو اول مساوات کے ساتھہ جمع کرو تو (لا۲+ی۲)۲+(لا۲+ی۲)=۱۸۲

اس مساوات درجہ دوم $لا^2 + ی^2 = ۱۳$ سے $۱۳ = ۱۳$ حاصل ہوتا ہے یعنی اول قیمت کو مساوات دوم میں رکھو تو لا ی = ± ۶ بعینہٖ حاصل ہوگا

(۴۷) اول مساوات سے لا ی (ی + لا - ۳) = ۳ (۴ لا + ی - لا ی) اس مساوات اور دوسرے مساوات کو آپس میں ضرب دو تو $لا^2 ی^2$ (ی + ۴ لا - لا ی) (ی + لا - ۳) = ۳۶ (لا + ی - ۳) اسیواسطے (ی + ۴ لا - لا ی) (ی + لا - ۳) = ۰ یا $لا^2 ی^2$ = ۳۶ اول لا ی = + ۶ کے لو اور اول مساوات معلوم میں رکھو اور پھر ی + لا - ۳ = ۰ لو اسے ی + ۴ لا - لا ی = ۰ حاصل ہوگا اسے لا اور ی کو دریافت کرو

(۴۸) دوسرے مساوات کو اول مساوات پر تقسیم کرو تو لا + ی - √لا ی = ۱۹ اسواسطے جمع اور تفریق کرنے سے لا + ی = ۱۰ اور √لا ی = ۴ حاصل ہوگا اسواسطے لا ی = ۱۶ اور ۱۰ - لا بجائی ی کے لکھو

(۴۹) دوسرے مساوات کو اول مساوات پر تقسیم کرو تو لا + ی + √لا ی = ۱۹ جمع اور تفریق کرنے سے لا + ی = ۱۳ اور √لا ی = ۶ حاصل ہوگا

(۵۰) لا + ی = ۲ ۷ اور $\frac{1}{لا^2} + \frac{1}{ی^2} = ۶$ اول مساوات کو دوسرے مساوات پر تقسیم کرو تو $\frac{1}{لا^2} - \frac{1}{لا ی} + \frac{1}{ی^2}$ = ۳ یا ۶ - $\frac{1}{لا ی}$ بجائی $\frac{1}{ی^2}$ کے رکھو تو

$$\frac{2}{لا^2} - ۶ \frac{1}{لا} + ۱۲ = ۴$$

اسواسطے $(\frac{1}{لا} - ۳)^2 = ۱$

(۵۱) $لا^2 - ی^2 = (۸ - لا)^2$ نیز ی کے جگہہ لا - ۱ رکھو

(۵۲) لا + ی = ۷ + √لا ی اور √لا ی (لا + ی) = ۷۸ اسلئی √لا ی (۷ + √لا ی) = ۷۸ اس مساوات درجہ دوم سی √لا ی = ۶ یا -۲ کے حاصل ہوگا

(۵۳) لا + ی = ۱۰ اور لا + ی = $\frac{5}{2}$ √ی لا اسواسطے ۱۰ = $\frac{5}{2}$ √لا ی اور √لا ی = ۴

(۵۴) اول مساوات کا مجذور کرو لا + ی - ۲ √لا ی = ۴ لا ی اسواسطے ۲۰ - ۲ √لا ی = ۱۴ لا ی

(ی - ۳ + لا) (لا)

(۷۲) ۲ ی + ۳ لا = ۱۳ الا کو آمین ی کی جگہہ ۱۳-۳ لا / ۲ رکہو اور لا اور ی کو اسطرح دریافت کرو اور پہری کو لا کو اول مساوات سی

(۷۳) کسر دور کرو تو لا ی + لا ی = ا اور ی ی + لا ی = ا اور ی لا + ی ی = ا

اول اور دوم کو تفریق کرو تو لا ی = ی ی یعنی لا = ی اور دوسرے تیسرے کو باہم تفریق کرو تو لا ی = ی لا اور ی = ی یعنی لا = ی = ی اور ۲ لا^۲ = ا اور لا = ± ۱/√۲

(۷۴) ۱/ا^۲ = ۱/لا ی + ۱/لا ی اور ۱/ب^۲ = ۱/ی ی + ۱/لا ی اور ۱/ح^۲ = ۱/لا ی + ۱/ی ی پس ۱/ا^۲ + ۱/ب^۲ − ۱/ح^۲ = ۲/لا ی اسی لا ی دریافت ہوتا ہی اور اسیطرح لا ی اور ی ی دریافت ہونگے ان تینوں کو آپسمین ضرب دو تو لا^۲ ی^۲ ی^۲ دریافت ہوگا اسکا جذر لا ی ی معلوم ہوگا اسمین لا ی کی قیمت رکہنے سے ی دریافت ہوگا اور علےٰ ہذا القیاس لا اور ی دریافت ہونگے

(۷۵) لا^۲ + ی ی = ح و ی^۲ + ی لا = ح اور ی^۲ + لا ی = د

دوسرے مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو (لا − ی) (لا + ی − ی) = ۰

اسواسطے لا − ی = ۰ اور لا + ی = ی اول لا = ی تو

لا^۲ + لا ی = ح اور ی^۲ + لا^۲ = د اسواسطے ی = (ح − لا^۲)/لا اندراج قیمت سے (ح − لا^۲)^۲/لا^۲ + لا^۲ = د دوم ی = ی − لا لو تو (ی − لا)^۲ + لا ی = ح اور ی^۲ + لا (ی − لا) = د ان دونو مساواتون کو جمع کرو

(۷۶) لا + ی/ی = ۲۹/۶ اور ی + لا/ی = ۳۴/۶ جمع کرنے سے

لا + ی (۱ + ۱/ی) = ۲۱/۲ اسواسطے لا + ی = ۲۱ ی / ۲(۱ + ی) پس ۲۱ ی / ۲(۱ + ی) + ی = ۱۵

(۷۷) ی = ۱/لا ی دونو اول مساواتون مین اس قیمت کی مندرج کرو تو لا + ی + ۱/لا ی = ی/۲ اور ۱/لا + ۱/ی + لا ی = ی/۲ تفریق کرنے سے (لا + ی) (۱ − ۱/لا ی) + (۱ − لا^۲ ی^۲)/لا ی = ۰

اسواسطے کیا لا ی − ۱ = ۰ یا لا + ی = (۱ + لا ی)/لا ی

(۷۸) (لا + ی + ی)^۳ = ۱ اور (لا + ی + ی) (لا^۲ + ی^۲ + ی^۲) = ۱ اور

لا^2 + ء^2 + ی^2 = ۱ اسواسطے (لا + ء + ی)^3 + ۲ (لا^3 + ء^3 + ی^3) − ۳ (لا + ء + ی) (لا^2 + ء^2 + ی^2) = ۰

یعنے ۶ لاءی = ۰

(۷۹) تینوں مساواتوں کو جمع کرو تو (لا + ء + ی)^2 = ا^2 + ب^2 + ح^2 اسواسطے

لا + ء + ی = ± (ا^2 + ب^2 + ح^2)$^{\frac{1}{2}}$

(۸۰) لاء + ءی + ی لا = ۲۶ . . . (۱)

(لا + ء + ی) (لاء + ءی + ی لا) − ۳ لاءی = ۱۶۲ . . (۲)

(لا^2 + ء^2 + ی^2) (لاء + ءی + ی لا) − لاءی (لا + ء + ی) = ۵۳۸ . . (۳)

(۱) مساوات کو (۲) میں مندرج کرو تو ۲۶ (لا + ء + ی) − ۳ لاءی = ۱۶۲ (۴)

اور (۱) اور (۴) کو (۳) میں مندرج کرو تو

۲۶ (لا^2 + ء^2 + ی^2) − [۲۶ (لا + ء + ی) − ۱۶۲] / ۳ (لا + ء + ی) = ۵۳۸

(۱) کو ۵۲ میں ضرب دیکر جمع کرو تو

۲۶ (لا + ء + ی)^2 − ۲۶/۳ (لا + ء + ی)^2 − ۵۴ (لا + ء + ی) = ۱۸۹۰ یعنی

۵۲/۳ (لا + ء + ی)^2 − ۵۴ (لا + ء + ی) = ۱۸۹۰ اس مساوات درجہ دوم کے
حل کرنے سے لا + ء + ی کی ایک قیمت ۹ معلوم ہوتی ہے پس لاءی = ۲۴

اب ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ لا + ء + ی = ۹ اور لاء + ءی + ی لا = ۲۶ اور لاءی = ۲۴

اسواسطے لا + ء + ۲۴/لاء = ۹ اور لاء + ۲۴(لا + ء)/لاء = ۲۶ اسواسطے

لاء + (۹ − ۲۴/لاء) ۲۴/لاء = ۲۶ اسواسطے (لاء)^3 − ۲۶ (لاء)^2 + ۲۱۶ لاء − ۵۷۶ = ۰

امتحان کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لاء = ۶ یا ۸ یا ۱۲ کے

چوبیسواں باب

(۱) فرض کرو کہ ایک عدد کو لا اور دوسرے کو ء تعبیر کرتا ہے تو

لا + ء = ۳۹   لا^3 + ء^3 = ۱۷۱۹۹

(۲) فرض کرو کہ عدد مطلوب کو (لا+۱) (لا+۲) (لا+۳) تعبیر کرتا ہے تو

(لا+۱) (لا+۲) + لا (لا+۲) + لا (لا+۱) = ۴۷

(۳) فرض کرو کہ طول لا گز ہے تو عرض لا−۱ گز ہوگا تو

لا (لا−۱) = ۳ × ۴۰ ۴۸

(۴) فرض کرو کہ ٹہری ہوئی پانی مین ملاح لا میل فی گہنٹہ کشتی کہیتے ہین تو دہار پر ۳ ۱/۲ میل ۳ ۱/۲ / (لا+۲) گہنٹہ مین لیجاینگے اور الٹی دہار پر ۳ ۱/۲ / (لا−۲) گہنٹہ مین لاینگے اسواسطے

۳ ۱/۲ / (لا+۲) + ۳ ۱/۲ / (لا−۲) = ۱ ۲/۳

(۵) فرض کرو کہ باغ کے دو مقابل سمتون مین سے ہر ایک سمت مین ٹٹیات اور باقی دو مقابل سمتون مین ٹٹیان لگائی جایئن تو ۲لا + ۲ر = ۱۰۷ اور چونکہ ہر یک ٹٹی دو گز لنبی ہے اسلئے ۴لا ر مربع گز باغ کا رقبہ ہوگا اسیواسطے

۴لا ر = ۲۹۴۰ + ۹۰۹۸

(۶) فرضکرو کہ کاشتکار نے لا بیگہی زمین لی تہی تو وہ ۸۴/لا روپیہ فی بیگہہ دیتا ہے اور (لا−۴) بیگہہ جو اوسنے اور کسانون کی دی اور اونسے ۸۴/لا + ۱/۲ فی بیگہہ اوسنے لیتا ہے اسواسطے

(لا−۴) (۸۴/لا + ۱/۲) = ۸۴ .

(۷) فرض کرو کہ لا بہیڑین خریدین تو ۴۳ ۳/۴ / لا ایک بہیڑ کی قیمت ہوئی اور (لا−۲) بہیڑ اوسنے فی بہیڑ (۴۳ ۳/۴ / لا + ۱/۱۶) ا بہیڑ کے حساب سے بیچین اسلئے

(لا−۲) (۴۳ ۳/۴ / لا + ۱/۱۶) = ۴۳ ۳/۴

(۸) فرض کرو کہ خط کے طول کو لا تعبیر کرتا ہے اور حصہ محدودہ کے طول کو لا تو

ل/۲ (ل/۲ + لا) = لا۲

(۹) فرض کرو کہ لا مقسوم اور ی مقسوم علیہ کو تعبیر کرتا ہے تو لا ی = ۷۵۰ اور لا/ی = ۳ ۱/۳

(۱۰) فرض کرو کہ اوس شخص کو لا نیبو ہاتہہ آئی تو نیبون کی بازار کی قیمت ۱/(لا+۲)

فی نیبو ہوگی اور اوس شخص نے $\frac{۱}{\text{لا}}$ آنہ ہر ایک نیبو کی قیمت دی

اسواسطے $\frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۵}{۲+\text{لا}} - \frac{۱۵}{\text{لا}}$

(۱۱) فرض کرو کہ فی درجن انڈوں کی قیمت لا ہے تو ایک شلنگ کی $\frac{۱۲}{\text{لا}}$ درجن انڈے آتے ہیں یعنی $\frac{۱۴۴}{\text{لا}}$ انڈے اور اگر فی درجن ایک پنی قیمت کم ہوتی تو $\frac{۱۴۴}{\text{لا}-۱}$ انڈے ایک شلنگ کے آتے اسواسطے $\frac{۱۴۴}{\text{لا}-۱} - \frac{۱۴۴}{\text{لا}} = ۲$

(۱۲) فرض کرو کہ چوک میں ایک آنہ کی لا نیبو آتی ہیں تو منڈی میں (لا+۶) نیبو ایک آنہ کے آوینگے اور چوک میں پندرہ نیبو کی قیمت $\frac{۱۵}{\text{لا}}$ اور منڈی میں $\frac{۱۵}{\text{لا}+۶}$ ہوگی اسواسطے

$$\frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۵}{۶+\text{لا}} - \frac{۱۵}{\text{لا}}$$

(۱۳) فرض کرو کہ بڑی عدد کو لا اور چھوٹی عدد کو ی تعبیر کرتا ہے تو

$$\text{لا}+\text{ی} = ۶\,(\text{لا}-\text{ی}) \quad \text{اور} \quad \text{لا ی} = \frac{۱۲\text{لا}}{\text{ی}} + \text{لا}$$

(۱۴) فرض کرو کہ اول مزدور نے لا دنوں کام کیا تو دوسرے نے (لا−۶) دن کام کیا تو اول نے $\frac{۹۶}{\text{لا}}$ آنے فی یوم پائے اور $\frac{۵۴}{\text{لا}-۶}$ آنے ہر ایک دن دوسرے نے پائے اسواسطے

$$(\text{لا}-۶)\,\frac{۹۶}{\text{لا}} = \text{لا} \times \frac{۵۴}{\text{لا}-۶}$$

(۱۵) فرضکرو کہ جلسہ میں آدمیوں کی تعداد لا ہے اور جو انمیں ہر ایک نے صرف کیے انکی تعداد ی ہے تو $(\text{لا}+۵)\,(\text{ی}+۱) = ۱۲۰$ اور $(\text{لا}-۳)\,(\text{ی}-\frac{۲}{۳}) - ۵۲$

(۱۶) فرض کرو کہ حصوں کی تعداد جو خریدے گئے لا تھی اور ی بٹا فیصدی تھا تو اوسنے $\frac{۲۰(۱۰۰-\text{ی})}{۱۰۰}$ فی حصہ خریدا $\frac{۲۰(۱۰۰+\text{ی})}{۱۰۰}$ فی حصہ اوسنے بیچا اسواسطے

$$\frac{۲۰(۱۰۰-\text{ی})\,\text{لا}}{۱۰۰} = ۱۵۰۰ \quad \text{اور} \quad \frac{۲۰(۱۰۰+\text{ی})(\text{لا}-۶۰)}{۱۰۰} = ۱۰۰۰$$

(۱۷) فرض کرو کہ عدد مطلوب کو لا تعبیر کرتا ہے $\text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ = ۶\,(\text{لا}+۱)$ تقسیم لا+۱ پر کرو

(۱۸) فرضکرو کہ وہ لا روپیہ ی روپیہ سود فیصدی پر دیتا ہو تو ۱۳۰۰ − لا روپیہ کو ی شرح سود فیصدی پر دیتا ہے تو

$\frac{\text{لای}}{\text{د+ی}} - \frac{\text{لای}}{\text{د+ی}} = ۳۰$ اور $\text{د}\frac{\text{لای}}{(\text{د+ی})} = ۱۴$ اور $\text{ی}\frac{\text{لاد}}{(\text{د+ی})} = ۹$ سے

دوسرے مساوات کو تیسرے مساوات پر تقسیم کرو تو $\text{د} = \frac{۳\text{ی}}{۲}$ حاصل ہوگا اسکو اول مساوات مین رکھو،

(۲۳) فرضکرو کہ ایک دہانے سے جتنی گہنٹون مین برتن بہر جاتا ہے اوسکی تعداد لا ہے ۔ تو دوسرے دہانے سے جتنی گہنٹون مین بہریگا اوسکی تعداد لا−۲ ہوگی اسیواسطے

$$\frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{لا}-۲} = \frac{۱}{۱\frac{۷}{۸}} = \frac{۸}{۱۵}$$

(۲۴) فرضکرو کہ جتنی گہنٹے مین ایک دہانے سے حوض بہر جاتا ہے اوسکے تعداد لا ہے اور دوسرے دہانے جتنی گہنٹے مین حوض بہرتا ہو اوسکے تعداد ی ہے اول دہانہ $\frac{۳\text{ی}}{۵}$ گہنٹے تک کہلا رہا اسواسطے اوسنے حوض کے $\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}}$ حصے بہر کر اور حوض کے $(۱-\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}})$ حصے بہرنے باقی رہے ۔ اب یہہ دوسرے دہانے سے $\text{ی}(۱-\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}})$ گہنٹے مین بہر جاتا اسلئے کل وقت حوض کے بہرنے مین $\frac{۳\text{ی}}{۵} + \text{ی}(۱-\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}})$ لگا کر دونو دہانے کہلے رہتے تو $\frac{\text{لای}}{\text{لا+ی}}$ گہنٹون مین حوض بہر جاتا اسلئے $\frac{\text{لای}}{\text{لا+ی}} = \frac{۳\text{ی}}{۵} + \text{ی}(۱-\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}}) - ۶$ ـ

$\frac{۱}{\text{لا}} \times \frac{\text{لای}}{\text{لا+ی}} = \frac{۲}{۳}(۱-\frac{۳\text{ی}}{۵\text{لا}})$ اب $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ کے جگہہ د دوسرے مساوات مین رکھو تو

$\frac{\text{د}}{۱+\text{د}} = \frac{۲}{۳}(۱-\frac{۳\text{د}}{۵})$ اسیواسطے $۶\text{د}^۲ + ۱۱\text{د} - ۱۰ = ۱۰$ اس مساوات کی قیمت جو ٹہیک سوال کے موافق ہوتی ہے $\frac{۲}{۳}$ ہے اسلئے ی کے جگہ $\frac{۲\text{لا}}{۳}$ اول مساوات مین رکھو

(۲۵) فرضکرو کہ مزدورون کی تعداد لا ہے اور ہر ایک مزدور نے جتنا بوجہ اٹہایا اوسکی سیرونکی تعداد د ہے اور جتنی دفعہ ایک گہنٹہ مین بوجہ اٹہاتے ہین اوسکی تعداد ی ہے

تو ۸ لا د ی کل بوجہ ہوا جو اوٹہایا گیا پس

۸ لا د ی = ۷ (لا+۸) (د−۵) ی اور ۸ لا د ی = ۹ (لا−۸) (د+۱۱) ہین

اسواسطے ۸ لا د = ۷ (لا+۸) (د−۵) اور ۸ لا د = ۹ (لا−۸) (د+۱۱)

پچیسوان باب

(۱) $\frac{\text{ا}^۲(\text{ج}-\text{ب}) + \text{ب}^۲(\text{ا}-\text{ج}) + \text{ج}^۲(\text{ب}-\text{ا})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})}$ اسی معلوم ہوتا ہے کہ شمار کنندہ اور نسبت نما دونو

(۲) تینون جملون کی تحویل اس صورت مین ہوتی ہے ا−ب+ج−د−ب ج د+ا ج د−ا ب د+ا ب ج=

پس لا^2 − ۳ لا + ۳۰ = ۰ یعنی اگر لا = ۱۰ کے ہو تو مجذور کامل ہوگا

(۱۰) اگر لا^4 + ا لا^3 + ب لا^2 + ح لا + د مجذور کامل ہو تو جذر کی صورت لا^2 + ع لا + ق کی ہوگی اسمین ع اور ق کے اندر لا نہین ہوگا پس یہہ مطابقہ حاصل ہوگا کہ

لا^4 + ا لا^3 + ب لا^2 + ح لا + د = لا^4 + ۲ ع لا^3 + (ع^2 + ۲ ق) لا^2 + ۲ ع ق لا + ق^2

پس ا = ۲ ع اور ب = (ع^2 + ۲ ق) اور ح = ۲ ع ق اور د = ق^2

اسواسطے ا (۴ ب − ا^2) = ۲ ع × ۸ ق = ۱۶ ع ق = ۸ ح اور (۴ ب − ا^2)^2 = (۸ ق)^2 = ۶۴ ق^2 = ۶۴ د

(۱۱) (۱ + لا لا' + ی ی')^2 = (۱ + لا^2 + ی^2) (۱ + لا'^{2} + ی'^{2}) عمل کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا^2 + ی^2 + لا'^{2} + ی'^{2} + لا^2 ی'^{2} + لا'^{2} ی^2 − ۲ لا لا' − ۲ ی ی' − ۲ لا لا' ی ی' = ۰

یعنے (لا − لا')^2 + (ی − ی')^2 + (لا ی' − لا' ی)^2 = ۰

اسواسطے ہر یک مجذور برابر صفر کے ہونا چاہیے اسیواسطے لا = لا' اور ی = ی'

(۱۳) فرض کرو کہ کٹوری کی اصلی قیمت لا ہے تو نقصان لا − ۳۰ $\frac{۳}{۴}$ ہوا اسواسطے

لا − ۳۰ $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{\text{لا لا}}{۱۰۰}$

(۱۴) فرض کرو کہ لا اور د اور ی حصے ہیں جو بالترتیب مقدارین ہیں چہوٹے ہوجاتے ہیں تو

لا + د + ی = ۱۹ اور د − ی = $\sqrt{\text{لا}}$ اور لا − د = ی^2 دوسرے مساوات سے

لا = د^2 + ی^2 − ۲ د ی اسکو تیسرے مساوات مین درج کرو اور د پر تقسیم کرو تو د = ۲ ی + ۱ اور تیسرے مساوات لا = (ی + ۱)^2 ان قیمتون کو مساوات اول مین رکہو تو

ی^2 + ۵ ی = ۱۴

(۱۵) $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ کے ع اور $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ کے بجای ق رکہو اور اول فرض کرو کہ ۳ کا اضعاف ن ہی اور ن = ۳ م تو بموجب دفعہ ۳۶۰ ع^3 = ۱ اسیواسطے ع^{۳م} = ۱ اور ق^3 = ۱ اسواسطے ق^{۳م} = ۱ پس مجموعہ = ۲ دوم فرضکرو کہ ن ایسا ہی جب اوسکو ۳ پر تقسیم کرتے ہین تو ایک باقی رہتا ہے اور اوسکی صورت ۳ م + ۱ ہے

اسواسطے کیا √ا + لا − √ا = ۰ یا √ا − لا + √ا = ن [√ا + لا − √ا]

اول مساوات لا = ۰ کے حاصل ہوتا ہے اور دوسرے انتقال سے √ا − لا − ن √ا + لا = (ن − ۱) √ا

مجذور کرو تو ا (۱ + ن۲) + لا (ن۲ − ۱) − ۲ ن √ا۲ − لا۲ = (ن − ۱)۲ ا اسواسطے

۲ ن ا + لا (ن۲ − ۱) = ۲ ن √ا۲ − لا۲ مجذور کرو

(۲۳) ا لا + ب ی = ۲ لا ی اور ی کے جگہہ ا + ب − لا رکہو تو ۲ لا۲ − (۳ ا + ب) لا + ا۲ + ا ب = ۰

(۲۴) ا ب (لا + ی) + (ا + ب) لا ی / (ا + لا) (ب + ی) = (ا + ب) ح / ا + ب + ح اب دوسرے مساوات کو کام مین لاؤ تو

[ا + ب + ح] [ا ب ح + (ا + ب) لا ی] = (ا + ب) ح (ا + لا) (ب + ی)

ی کے جگہہ ح − لا رکہو تو یہہ ہمکو حاصل ہوگا کہ (ا + ب)۲ لا۲ − ۲ ا ح لا (ا + ب) + ا۲ ح۲ = ۰ یعنے

[(ا + ب) لا − ا ح]۲ = ۰

(۲۵) ۹ (لا۲ − ی۲) = ۵ لا ی و ۹ (لا + ی) = ۵ لا ی اسواسطے تقسیم کرنے سے لا − ی = ۱

(۲۶) اول مساوات = ا ی + ب لا = لا ی (لا + ی) / ح اسکو مساوات دوم مین مندرج کرو تو

لا۲ ی۲ / ح (لا + ی − ح) = ا ب ح (لا + ی − ح) اسواسطے کیا لا + ی − ح = ۰

یا لا۲ ی۲ = ا ب ح۲ اول صورت کے موافق دوسرے مساوات سے یہہ حاصل ہوگا کہ

ا ی + ب لا − لا ی = ۰ اب ی کے جگہہ ح − لا رکہو دوم لا ی = ح √ا ب لیکن

اول مساوات مین رکہو تو ا ی + ب لا = √ا ب (لا + ی) اسواسطے ی √ا (√ا − √ب) = لا √ب (√ا − √ب)

(۲۷) دوسرے مساوات سے لا + ۱/ی = ۹ ی اسکو اول مساوات مین مندرج کرو تو

ی (لا + ی) = ۱ اس سبب سے دوسرا اور تیسرے مساوات کی یہہ صورت ہو جائنگے کہ

(لا + ی) (لا + ۱/ی) = ۹ اور (لا + ی) (۱ + ۱/لا ی) = ۹/۲ اول کو آخر پر تقسیم کرو تو

لا + ۱/ی = ۲ (۱ + ۱/لا ی) اسواسطے لا − ۲ = ۱/ی (۲/لا − ۱) اسواسطے کیا لا = ۲

یعنے لا ی = −۱ مساوات مین سے پہلے قیمت دخل رکہتے ہے اسواسطے ی + ۱/ی = ۲

(۲۸) چاروں مساواتون کو جمع کرو تو (و + لا + ی + ی)۲ = ۴ (ا + ب + ح)

اب اِن مساوات مین سے اول اور دوم اور سوم کو جدا جدا مساواتون کو تفریق کرو

(د+لا-ر-ی)^۲ = ۸ا اور (د-لا+ر-ی)^۲ = ۸ب اور (د-لا-ر+ی)^۲ = ۸ح

پس مساواتون کے جذر نکالین تو چار مساواتین درجہ اول کے حاصل ہو جائینگے

چھبیسوان باب

(۱) (۳/۴)^۲ = ۹/۱۶ اور ۱۲۱/۱۴۴ = ۱۱/۱۲ (۲) ۳۵/۵ × ۶/۹ = ۶/۱۵

(۳) فرض کرو کہ وہ اعداد ۲لا اور ۳لا ہین تو (۲لا+۹)/(۳لا+۹) = ۳/۴

(۴) ((ا+ح)/(ب+ح))^۲ = (ا^۲+۲اح+ح^۲)/(ب^۲+۲بح+ح^۲) = (ا^۲+۲اح+اب)/(ب^۲+۲باح+اب) = ا(ا+۲ح+ب)/ب(ب+۲ح+ا) = ا/ب

(۵) فرض کرو کہ ا اور ب کے درمیان چھوٹی سڑک کا طول لا میل ہے تو بڑی سڑک کا لا+۱۴ ہوگا اور ب سے س تک چھوٹی سڑک کا طول ۲لا ہے تو بڑی سڑک کا طول ۲لا+۸ ہوگا پس

(لا+۱۴)/(۲لا+۸) = ۳/۴

(۶) (الا+بر)/(حی) + ۱ = (حی+الا)/(بر) + ۱ = (بر+حی)/(الا) + ۱ اسی واسطے

(الا+بر+حی)/(حی) = (حی+الا+بر)/(بر) = (بر+حی+الا)/(الا)

اسواسطے ۱/(حی) = ۱/(بر) = ۱/(الا) اسلئے بر = حی اور بر = الا اور

لا+ر+ی = ۲ اگر الا+بر+حی = ۰ تو (الا+بر)/(حی) = -۱ پس لا+ر+ی = -۱

(۷) بموجب دفعہ ۳۸۴ کے ہر یک کسر = (ا۱+ا۲لا+ا۲+ا۳لا+ا۳+ا۱لا)/(ا۲+ا۳ر+ا۳+ا۱ر+ا۱+ا۲ر) = ((ا۱+ا۲+ا۳)(۱+لا))/((ا۱+ا۲+ا۳)(۱+ر)) = (۱+لا)/(۱+ر)

(۸) بموجب دفعہ ۳۸۴ کے ہر یک کو =

(ا-ب+ب-ح+ح-ا+ا+ب+ح)/(ار+بلا+بی+حلا+حر+ای+الا+بر+حی) = (ا+ب+ح)/((ا+ب+ح)(لا+ر+ی))

اور یہ = ۱/(لا+ر+ی) بشرطیکہ ا+ب+ح صفر نہ ہو

(۹) (ار-بلا)/ح = (حلا-ای)/ب = (بی-حر)/ا = (ح(ار-بلا)+ب(حلا-ای)+ا(بی-حر))/(ا^۲+ب^۲+ح^۲) = ۰

پس ار-بلا = ۰ اور حلا-ای = ۰ اور بی-حر = ۰

(۱۰) $\frac{ا-ا'}{ا-ا''} = \frac{ب'-ب''}{ب'-ب''} = \frac{ب'(ا-ا'')-ا'(ب'-ب'')}{ب(ا-ا'')-ا'(ب'-ب'')} = \frac{ب'ا-ب'ا'}{ب''ا-ب'ا''}$

اسیطرح سے اور صورتین بہی قائم ہوسکتی ہین

(۱۱) اول دو مساواتون سے $\frac{لا}{۳} = \frac{ی}{۴} = \frac{ی}{۵}$ = ک کے مقرر کرو تو لا = ۳ک

اور ر = ۴ک اور ی = ۵ک اسکو اخر مساوات مین رکہو تو $ک^۳$ = ۸ اور ک = ۲

(۱۲) اول مساواتون سے $\frac{لا}{ا(ب^۲-ح^۲)} = \frac{ر}{ب(ح^۲-ا^۲)} = \frac{ی}{ح(ا^۲-ب^۲)}$ = ک کے مقرر

اسکو اخر مساوات مین رکہو تو ک = ± ا یا ۔

ستائیسوان باب

(۴) فرضکرو کہ ایام مطلوب کی تعداد ی ہے اور

فرضکرو کہ د تعداد ان دنون کی جنمین لا آدمی اٹھہ گہنٹہ روز کتابت کرکے اوس کتاب کو لکہنا تمام کر

د : ۳۲ :: ۲ : لا اور ی : د :: ۸ : ر اسواسطے د = $\frac{۳۲ \times ۲}{ی}$ اور

ی = $\frac{۸ د}{ر} = \frac{۳۲ \times ۸ \times ۲}{لا ر}$

(۵) $\frac{لا}{ر} = \frac{(لا+ی)^۲}{(ر+ی)^۲} = \frac{لا^۲+۲لای+ی^۲}{ر^۲+۲ری+ی^۲}$ بموجب دفعہ ۳۹۴ کے $\frac{لا-ر}{ر} = \frac{لا^۲-ر^۲+۲(لا-ر)ی}{ر^۲+۲ری+ی^۲}$

لا - ر پر تقسیم کرو تو $\frac{۱}{ر} = \frac{لا+ر+۲ی}{ر^۲+۲ری+ی^۲}$ کسر دور کی تو $ی^۲$ = لا ر

(۶) فرضکرو کہ $\frac{ا}{ب}$ = ر اور $\frac{ع}{ق}$ = ر تو ا = ر ب اور ع = ر ق

$(ا^۲+ب^۲) \div \frac{ا^۳}{ا+ب} = (ر^۲+۱)ب^۲ : \frac{ب^۳ ر^۳}{ب(۱+ر)} = \frac{(۱+ر)(۱+ر^۲)}{ر^۳}$

$(ع^۲+ق^۲) \div \frac{ع^۳}{ع+ق} = ق^۲(۱+ر^۲) \div \frac{ق^۳ ر^۳}{ق(۱+ر)} = \frac{(۱+ر)(۱+ر^۲)}{ر^۳}$

پس اسسے نتیجہ مطلوب ثابت ہوگیا

(۷) فرضکرو کہ ا : ب :: ح : د اور ب = ح د تو ا د = ب ح اسواسطے $\frac{ا ح^۲}{ح}$ = ب ح

اسلئے ا ب = $ح^۲$

(۸) $(ا+د)^۲-(ب+ح)^۲ = (ا-د)^۲-(ب-ح)^۲$ اسواسطے ۲ ا د - ۲ ب ح = -۲ ا د + ۲ ب ح

اسواسطے ا د = ب ح

(۱۰) فرض کرو کہ پہلے قرابہ میں کل لا حصے شراب ہے تو ۱ - لا پانی ہوگا اور
اور دوسرے قرابہ میں کل کی ی حصے شراب ہے تو ۱ - ی پانی ہوگا
جب ان دونوں میں برابر برابر تولیں بھر کر نکالتی ہیں تو دونوں میں شراب اور پانی برابر ہوتا ہے اسلئے
لا + ی = ۱ - لا + ۱ - ی اور جب ہم چار تولیں اول سے نکالتی اور ایک تول دوسرے سے تو
۴ لا + ی شراب اور ۴ (۱ - لا) + ۱ - ی پانی نکلتا ہے تو
۴ لا + ی : ۴ (۱ - لا) + ۱ - ی :: ۲ : ۳

(۱۱) فرض کرو کہ سوہن پاس لا روپیہ اور سوہن پاس ی روپیہ تھا اور موہن م لا روپیہ
داؤں پر لگایا تو سوہن نے م ی روپیہ لگایا ہوگا پس
لا + ی = ۱۶۸ اور لا + م ی = ۲ (ی - م ی) اور ی + م لا = ۳ (لا - م لا)
اسواسطے لا = (۲ - ۳ م) ی اور ی = (۳ - ۴ م) لا اسواسطے باہم ضرب دینے سے
ی = (۲ - ۳ م) (۳ - ۴ م) اس مساوات کی ایک قیمت $\frac{۵}{۱۲}$ سوال سے متعلق ہے

(۱۲) فرض کرو کہ مردانہ مجرموں کی تعداد لا اور زنانہ مجرموں کی تعداد ی ہے تو
لا (۱ - $\frac{۴ \frac{۱}{۲}}{۱۰۰}$) اور ی (۱ + $\frac{۹ \frac{۱}{۲}}{۱۰۰}$) یعنے تعداد مردانہ اور زنانہ مجرموں کی ہوگی اسواسطے
لا (۱ - $\frac{۴ \frac{۱}{۲}}{۱۰۰}$) + ی (۱ + $\frac{۹ \frac{۱}{۲}}{۱۰۰}$) = (لا + ی) (۱ + $\frac{\frac{۱}{۲}}{۱۰۰}$) اسسے معلوم ہوتا ہے کہ
ی = $\frac{۴ لا}{۵}$

اٹھائیسواں باب

(۱) ی = م لا رکھو تو ۳ = م × ۱ اسواسطے م = ۳ پس ی = ۳ لا اور ی = ۹ جب لا = ۳
(۲) ا = م ب رکھو تو ۱۵ = م × ۳ اسواسطے م = ۵ پس ا = ۵ ب
(۳) ی = م لا ی رکھو تو ۱ = م × ۱ اسواسطے م = ۱ پس ی = لا ی اور ی = ۴ جب
لا = ۲ اور ی = ۲

(۴) ی = م (ع لا + ی) کے رکھو تو ۳ = م (ع + ۲) اور ۵ = م (۲ ع + ۳) اسواسطے
$\frac{۵}{۳}$ = $\frac{۲ ع + ۳}{ع + ۲}$ اسواسطے ع = ۱

(۵) جب $\frac{1}{ی}$ مستقل ہو تو لا ایسا متغیر ہوتا ہے جیسا کہ ء اور ء متغیر ہو تو لا ایسا بدلتا ہی جیسا کہ $\frac{1}{ی}$ پس ء اور $\frac{1}{ی}$ دونو متغیر ہونگے تو بموجب دفعہ ۴۲۵ کے لا ایسا بدلے گا جیسا کہ انکا حاصل ضرب

(۶) لا = $\frac{م ء}{ی}$ رکھو تو ۳ = ۲ م اسواسطے م = $\frac{۳}{۲}$ تو لا = $\frac{۳ ء}{۲ ی}$ اور لا = $\frac{۳}{۴}$ جب ء = ۲ اور ی = ۴

(۷) ہفتون کی تعداد اور مزدوری مین تغیر بالاستقامت اور ہفتون کی تعداد اور آدمیون مین تغیر بالعکس ہے، فرض کرو کہ ہفتون کی تعداد کو لا اور روپیون کی تعداد کو ء اور آدمیون کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو لا = $\frac{م ء}{ی}$ یعنی ۶ = $\frac{م \times ۱۴\frac{۱۴}{۱۹}}{۵}$ = $\frac{۲۸۵}{۸۰}$ م = $\frac{۵۶}{۱۹}$ م پس م = $\frac{۲}{۱۹}$ پس لا = $\frac{۴۸ ء}{۱۹ ی}$ اب ء کے جگہہ ۲۳ $\frac{۳}{۴}$ اور ی کی جگہہ ۴ رکھو تو لا = $\frac{\frac{۹۵}{۴} \times ۳۲}{۴ \times ۱۹}$ = ۱۰

(۸) $لا^۲$ = م $ی^۳$ اور ۳۶ = ۲۷ م اور م = $\frac{۴}{۳}$ پس $لا^۲$ = $\frac{۴}{۳}$ $ی^۳$

(۹) ایک مقدار کو ا لا سے اور دوسری کو $\frac{ب}{لا}$ سے تعبیر کرو تو ء ایسا بدلتا ہی جیسا کہ ا لا + $\frac{ب}{لا}$ ء = م (ا لا + $\frac{ب}{لا}$) رکھو تو ۴ = م (ا + ب) اور ۵ = م (۲ ا + $\frac{ب}{۲}$) اسواسطے م ا = ۲ اور م ب = ۲ پس ء = ۲ لا + $\frac{۲}{لا}$

(۱۰) فرض کرو کہ پہلی مقدار کو لا اور دوسری مقدار کو ء تعبیر کرتا ہی تو لا = م ء کے رکھو تو $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۱۹}{۱۲}$ م اسلئی م = $\frac{۹}{۱۹}$ پس لا = $\frac{۹}{۱۹}$ ء اور ء = ۱۹ جب لا = ۹

(۱۱) فرض کرو ایک مقدار ی ایسے بدلتی ہی جیسا کہ لا + ء جب لا - ء مستقل ور متعین ہو اور پہر وہ ایسی بدلتی ہی جیسے کہ لا - ء جب لا + ء معین اور مستقل ہو لا + ء کو ھ اور لا - ء کو و تعبیر کرو تو ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ و جب ھ مستقل و معین ہو اور ی ایسا بدلتا ہی جیسا کہ ھ جب و معین اور مستقل ہو تو جب ھ اور و جدا جدا متغیر ہونگی تو بموجب دفعہ ۴۲۵ کے ی ایسا بدلیگا جیسا کہ انکا حاصل ضرب ھ و یعنی $لا^۲ - ء^۲$

(۱۲) فرضکرو کہ کرہ کا نصف قطر لا اور حجم ء ہی اور چونکہ کرہ کا حجم ایسا بدلتا ہی جیسا اوسکی نصف قطر کا

۱/۲ = ۳/۸ = ۲ اساس سے ۲ = ۴

اونتیسواں باب

(۱)
۷ | ۱۲۳۴۵۶
۷ | ۱۷۶۳۶ ۴
۷ | ۲۵۱۹ ۳
۷ | ۳۵۹ ۶
۷ | ۵۱ ۲
۷ | ۷ ۲
۱ ۰

(۲)
۵ | ۱۳۵۷۵۳۱
۵ | ۲۷۱۵۰۶ ۱
۵ | ۵۴۳۰۱ ۱
۵ | ۱۰۸۶۰ ۱
۵ | ۲۱۷۲ ۰
۵ | ۴۳۴ ۲
۵ | ۸۶ ۴
۵ | ۱۷ ۰
۳ ۲

(۳)
۷ | ۳۵۷۲۳۴
۷ | ۵۱۰۳۳ ۲
۷ | ۷۲۹۰ ۳
۷ | ۱۰۴۱ ۳
۷ | ۱۴۸ ۵
۷ | ۲۱ ۱
۳ ۰

(۴)
گیارہ | ۳۳۳۳۱۰
گیارہ | ۳۰۳۰۰ د
گیارہ | ۲۷۵۴ ۶
گیارہ | ۲۵۰ ۴
گیارہ | ۲۲ ۸
۲ ۰

(۵)
دس | ۵۴۵
دس | ۳۲ ۹
۲ ۰

(۶)
دس | ۴۴۴۴
دس | ۲۲۲ ۴
دس | ۱۱ ۲
۶

(۷)
سات | ۳۴۱۳
سات | ۳۱۰ ۳
سات | ۲۴ ۲
۲ ۲

(۸)
بارہ | ۴۰۲۳۴
بارہ | ۱۳۲۴ ۱
بارہ | ۳۲ ۶
۱ ۵

(۹)
گیارہ | ۶۴۵۴
گیارہ | ۴۱۵۱ د
گیارہ | ۲۴۶ ۵
۱ | ۱۱۵ ۰
۱ ۱

(۱۰)
دس | ۵۹۵۱
دس | ۷۹۵ ۱
دس | ۱۹۴ ۴
دس | ۲۰ ۴
۲-۲

(۱۱)
۹ | ۱۵
۶ = ۸ × ۷۵/۱۰۰

(۱۲)
۸ | ۳۱۴۶۲
۸ | ۳۹۳۲ ۶
۸ | ۴۹۱ ۴
۸ | ۶۱ ۳
۷ ۵
۱ = ۸ × ۱۲۵/۱۰۰۰

(۲۸) فرضکرو کہ لا اساس ہے ۱۳۳۱ = لا^۳ اسواسطے لا = ۱۱

(۲۹) فرضکرو کہ لا اساس ہے ۱۴۰۰۰ = لا^۴ + ۳ لا^۳

اسواسطے ۱۴۰۰۲ ۱/۴ = (لا^۲ + ۳/۲ لا)^۲ یعنے ۶۴۰۰۹/۴ = (لا^۲ + ۳/۲ لا)^۲

اسواسطے ۲۵۳/۲ = لا^۲ + ۳ لا/۲

(۳۰) فرض کرو کہ لا اساس ہے تو ۳۵ ۵/۹ = ۵ لا + ۵ + ۵/لا

(۳۱) فرض کرو کہ لا اساس ہے تو ۱۴۶۴/۱۰۰۰۰ = ۴/لا + ۴/لا^۲

(۳۲) اساس جیسے بڑا فرض کیا گیا تو تقسیم کرنے میں یہہ دریافت ہوگا کہ ہم کو اس بات پر خیال کرنی کی ضرورت ہی نہیں پڑتی کہ اساس کیا ہے اور خارج قسمت ۱۰۰۲۰۰۱ نکل آتا ہے

(۳۳) جذر ۱۲ دریافت ہوتا ہے اور ہمیں کچھہ اساس پر خیال کرنے کی ضرورت ہی نہیں پڑتی

(۳۴) جذر الکعب ۱۱ ہے اور ہمیں کچھہ اساس پر خیال کرنے کی ضرورت ہی نہیں پڑتی

(۳۵)

۲	۱۷۱۹	
۲	۸۵۹	۱
۲	۴۲۹	۱
۲	۲۱۴	۱
۲	۱۰۷	۰
۲	۵۳	۱
۲	۲۶	۱
۲	۱۳	۰
۲	۶	۱
۲	۳	۰
	۱	۱

(۳۶) ۱۰۲۷ = ۳۴۲ × ۳ + ۱ اور ۳۴۲ = ۱۱۴ × ۳ اور ۱۱۴ = ۳۸ × ۳

اور ۳۸ = ۱۳ × ۳ − ۱ اور ۱۳ = ۴ × ۳ + ۱ اور ۴ = ۳ + ۱

پس ترتیب کو معکس کیا تو ۴ = ۳ + ۱ اور ۱۳ = ۳^۲ + ۳ + ۱ اور ۳۸ = ۳^۳ + ۳^۲ + ۳ − ۱

۱۱۴ = ۳^۴ + ۳^۳ + ۳^۲ − ۳ اور ۳۴۲ = ۳^۵ + ۳^۴ + ۳^۳ − ۳^۲ اور

۱۰۲۷ = ۳^۶ + ۳^۵ + ۳^۴ − ۳^۳ + ۱

یعنی ۸ (۱۲ ع۲ + ع۱) + ۴ ع۲ + ۲ ع۱ + ع یعنی ۴ ع۲ + ۲ ع۱ + ع.
پورا آٹھہ پر تقسیم ہوتا ہو

(۴۲) فرض کرو کہ ہر عدد کے ہندسوں کا مجموعہ ص ہی تو ہر ایک عدد برابر ہوا ص مع بعض اضعاف ۹ کے دفعہ ۲۴۶ دیکھو اسواسطے اعداد کا فرق ۹ کے اضعاف ہوئی

(۴۳) فرض کرو کہ ہندسوں کی تعداد ن ہی اور قطاس کا اساس ر ہے تو جو سب سے بڑا عدد ہوگا اوسمین ر-۱ ہندسی ہر مرتبے پر ہونگے اسواسطے وہ برابر رن-۱ کے ہوگا اور جو سب سے چھوٹا عدد ہوگا اوسکے اخر مرتبہ پر بائین طرف ایک اور مراتب مین صفر ہونگے اسلئے وہ رن-۱ ہوگا مثال فرض کرو کہ ن = ۳ اور ر = ۱۰ تو سب سے بڑا عدد ۹۹۹ اور چھوٹا عدد ۱۰۰ ہوگا

(۴۴) فرض کرو کہ ا اور ب اعداد کو تعبیر کرتے ہین اور ا بڑا ہی اور چونکہ یہہ معلوم ہے ا + ب اساس کا اضعاف ہے اور ا۲ - ب۲ = (ا - ب) (ا + ب)
اسلئے یہہ اضعاف اساس ہے پس اسی دعوی کا اول جز ثابت ہوا اور اب + ا۲ = ا (ا + ب) یہہ بھی اضعاف اساس ہی اسی ثابت ہوتا ہی کہ اگر ا۲ کو اور اب کو اساس پر تقسیم کرین تو دونو باقیون کا مجموعہ اساس کی برابر ہوگا

(۴۵) یہہ معلوم ہی کہ عدد معلوم ۲۳ اور ۵ اور ۳ پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے - تو علاوہ ۲ کے اوسکے پورا تقسیم کرنے والے یہہ بارہ عدد ہین ۲۲ و ۲۳ و ۲ × ۳ و ۲۲ × ۳ و ۲۳ × ۳ و ۲ × ۵ و ۲۲ × ۵ و ۲۳ × ۵ و ۳ × ۵ و ۲ × ۳ × ۵ و ۲۲ × ۳ × ۵ و ۲۳ × ۳ × ۵ یہہ بارہ عدد بارہ مشتق قطاس ہین اور چونکہ عدد کا کوئی پورا تقسیم کرنے والا نہین ہے اسلئے وہ ۲۳ × ۳ × ۵ یعنی ۱۲۰ ہے

تیسوان باب

(۱) ۲۰/۲ (۴ + ۱۹ × ۴) = ۱۸۰۰ (۲) ۳۲/۴ (۸ ۳۱/۱۴) ۱/۲ ± (- ۱/۲) = ۲۰

(۳) ۲۴/۲ (۵×۲۳/۴ − ۱/۴) = ۱۲ − ۱۵×۲۳ = ۳۳۳

(۴) ۲۰/۲ (۲×۱۹/۳ − ۱۰) = ۱۰ (− ۸/۳) = − ۲۶ ۲/۳

(۵) ۱۰/۲ (۲×۹/۵ − ۱۴/۵) = ۱۰/۲ (− ۴/۵) = − ۲

(۶) ۱۲/۲ (۳×۱۱/۴ + ۲) = ۴۱/۴ × ۶ = ۶۱ ۱/۲

(۷) ۲۱/۲ (۲۰/۲۱ − ۱۰/۷) = ۲۱/۲ × ۱۰/۲۱ = ۵

(۸) ۵۰/۲ (۴۹/۳ + ۲/۳) = ۱۷×۲۵ = ۴۲۵ (۹) ۳۰/۲ (۲۳۲ − ۸×۲۹) = ۰

(۱۰) ن/۲ [۱۸ + ۲ (ن − ۱)] = ن/۲ (۲ن + ۱۶) = ن (ن + ۸)

(۱۱) ن/۲ [۲ − (ن − ۱)/۶] = ن/۲ × (۱۲ − ن + ۱)/۶ = ن (۱۳ − ن)/۱۲

(۱۲) فرض کرو کہ فرق مشترک ب ہے تو اول پانچ رقموں کا مجموعہ ۵/۲ (۲ + ۴ب) ہے اور اگلے پانچ رقموں کا مجموعہ ۵/۲ [۲(۱ + ۵ب) + ۴ ب] ہے اسلئے کہ اول رقم ۱ + ۵ب ہے اسواسطے ۵/۲ (۲ + ۴ ب) = ۱/۴ × ۵/۲ [۲ + ۱۴ ب] اسواسطے ۴ (۲ + ۴ب) = ۲ + ۱۴ب

(۱۳) یہاں ا = ۲ اور ۷ = ۲ + ۴ب اسواسطے ب = ۵/۴ اور

۶۳ = ن/۲ [۴ + ۵/۴ (ن − ۱)] = ن/۸ (۵ن + ۱۱)

(۱۴) ۸۸ = ن/۲ [۳۲ + ۴ (ن − ۱)] = ن (۲ن + ۱۴)

(۱۵) یہاں م/۲ [۲ + (م − ۱) ب] : ن/۲ [۲ + (ن − ۱) ب] :: م² : ن²

اسواسطے م ن² [۲ + (م − ۱) ب] = م² ن [۲ + (ن − ۱) ب] اسواسطے

ن [۲ + (م − ۱) ب] = م [۲ + (ن − ۱) ب] اسواسطے ۲ (ن − م) = ب (ن − م) اسواسطے ب = ۲

اور ن ویں رقم = ا + (ن − ۱) ب = ۱ + ۲ن − ۲ = ۲ ن − ۱

(۱۶) ۱۲۰ = ن/۲ [۴۲ − ۲ (ن − ۱)] = ن (۲۲ − ن) اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن = ۱۰ یا ۱۲

اگر ن = ۱۰ تو آخر رقم = ۲۱ − ۹×۲ = ۳ اگر ن = ۱۲ تو آخر رقم = ۲۱ − ۱۱×۲ = −۱

(۱۷) ۲۰۴ = ن/۲ [ا + ل] = ۱/۲ ن (۵۰ + ۱) اسواسطے ن = ۸ اور ۵۰ = ۱ + ۷ب

اور ب = ۰

(۱۸) ۲۹ = ۱ + ۷ ب اسواسطے ب = ۴

(۱۹) سلسلہ ۱ و ۵ و ۹ ۰۰۰ کی ن + ۱ رقموں کا مجموعہ $\frac{ن+۱}{۲}$ [۲ + ۴ن] اور سلسلہ ۳ و ۷ و ۱۱ کی ن رقموں کا مجموعہ $\frac{ن}{۲}$ [۶ + ۴ (ن - ۱)] یعنی $\frac{ن}{۲}$ [۲ + ۴ن] ان دونو مجموعونکی نسبت مطلوب ہے

(۲۰) ا = ۱۱ اور ب = ۴ تو ص = $\frac{ن}{۲}$ [۲ + ۴ (ن - ۱)] = ن (۲ن - ۱)

(۲۱) ۱ن ۳ ۲ ۳ ۴ ۳ ۲ ۱ = $\frac{ن}{۲}$ [۲ + ۲ (ن - ۱)] = ن۲

(۲۲) ۱۸۴۰ = $\frac{ن}{۲}$ [۳۲ + ۸ (ن - ۱)] = ن [۴ن + ۱۲]

(۲۳) ظاہر ہے کہ ن - ۱ دفعہ چلنا پڑیگا اول دفعہ میں ۲ گز مسافت طی ہوگی اور دوسرے دفعہ ۲ (۱ + ۳) گز اور تیسرے دفعہ ۲ (۱ + ۳ + ۵) گز اور علی ہذا القیاس اول مسافت ۲ × ۱ گز اور دوسرے مسافت ۲ × ۴ اور تیسرے مسافت ۲ × ۹ اور علی ہذا القیاس ہے - پس بموجب کل مسافت ۲ [۱ + ۲۲ + ۳۲ ۰۰۰ ن - ۱ رقموں تک] ہوئی اور یہہ بحکم دفعہ ۰ ۴۹ = $\frac{(ن - ۱) ن (۲ن - ۱)}{۳}$ اس دفعہ ن کے جگہہ ن - ۱ رکہا اور ماحصل کو دو چند کر لیا ہے

(۲۴) ۶۶ = ۶ + ۱۳ ب اور ۶۶۶ = ۶ + ۱۳۳ ب اور ۶۶۶۶ = ا + (ن - ۱) ب اول اور دوم مساوات سے ا = ۱ اور ب = ۵ اور تیسرے مساوات میں ن - ۱ = ۱۳۳۳ اسلئی ن = ۱۳۳۴

(۲۵) فرض کرو کہ اوساط کی تعداد ن ہے تو ۲۱ = ۱ + (ن - ۱) ب اسواسطے ب = $\frac{۲۰}{ن - ۱}$ اول وسط ۱ + ب اور آخر وسط ۲۱ - ب ہے اسواسطے اوساط کا مجموعہ = $\frac{ن}{۲}$ [۱ + ب + ۲۱ - ب] = ۱۱ ن اور جو دو وسط بڑی ہیں وہ آخر کے ہیں یعنی ۲۱ - ب اور ۲۱ - ۲ ب اسواسطے ۱۱ ن : ۴۲ - ۳ ب :: ۱۱ : ۴ اسواسطے ۴ن = ۴۲ - ۳ ب = ۴۲ - $\frac{۶۰}{ن - ۱}$ اسواسطے ۴ن۲ - ۴۶ن + ۱۰۲ = ۰ اس مساوات میں جو قیمت داخل ہو سکتی ہے وہ ۶ ہے

(۲۶) ۲۸½ = ن/۲ [-۲۴ + ۳/۴ (ن-۱)] = ن/۸ [۳ن - ۵۱] ∴ ن = ۱۹ یا ۲-

(۲۷) ۲۵ = ن/۲ [۶ + (ن-۱)] = ن(ن+۵)/۲

(۲۸) ۱۴ = ن/۲ [-۱ + (ن-۱)] = ن/۲ (ن-۱۱)

(۲۹) ص = ن/۲ [۲ا + (ن-۱) ب] فنا ہو جائیگا اگر ۲ا + (ن-۱) ب صفر ہو یعنی ن-۱ = -۲ا/ب
اسے معلوم ہوا کہ ن صحیح عدد جبھی ہو سکتا ہی کہ ۲ا کو ب پورا پورا تقسیم کریگا اور اوسکی
علامت متضاد علامت ا کے ہو

(۳۰) ن = ا + (م-۱) ب اور م = ا + (ن-۱) ب تفریق کرنے سے
ن - م = (م-ن) ب اسواسطے ب = -۱ اسی معلوم ہوا کہ ا = م + ن - ۱
فرض کرو کہ ارقام مطلوبہ کی تعداد لا ہی تو ۱/۲ (م+ن) (م+ن-۱) = لا/۲ [۲(م+ن-۱) - (لا-۱)]
اسواسطے لا² - لا (۲م + ۲ن - ۱) + (م+ن) (م+ن-۱) = ۰
اسواسطے [لا - (۲م+۲ن-۱)/۲]² = ((۲م+۲ن-۱)/۲)² - (م+ن) (م+ن-۱) = ۱/۴
اسواسطے لا - (۲م+۲ن-۱)/۲ = ± ۱/۲ اسواسطے لا = م + ن یا م + ن - ۱ اور
اول صورت میں اخر رقم ہے اور دوسرے صورت میں صفر

(۳۱) ۷۲ = ن/۲ [۴۸ - ۴(ن-۱)] = ن (۲۶ - ۲ن)

(۳۲) ع ن + ق ن² = ن/۲ [۲ا + (ن-۱) ب] = ن/۲ [۲ا - ب + ن ب] = ن/۲ (۲ا - ب) + ن²ب/۲
چونکہ اس مساواتین ن کی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہی اسلئے اوسکی جگہہ متواتر اعداد ۱ و ۲ و ۳ ... رکہی
تو ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ (۲ا - ب)/۲ = ع اور ب/۲ = ق اسواسطے ب = ۲ق اور
۲ا = ۲ع + ب = ۲ع + ۲ق تو م وین رقم = ا + (م-۱) ب = ع + ق + ۲(م-۱) ق

(۳۳) ص_ا = ن/۲ [۲ا + ن - ۱]
ص_{۲ا+ن-۱} = ن/۲ [۲(۲ا + ن - ۱) + ن - ۱] = ن/۲ [۶ا + ۳ن - ۳] = ۳ ص_ا

(۳۴) یہہ ثابت کرتا ہی کہ (لا² - ۲لا - ۱)² + (لا² + ۲لا - ۱)² = ۲(لا² + ۱)² اور یہہ ظاہر ہے

(۳۵) ل² − ا² = [ا + (ن − ۱) ب]² − ا² = (ن − ۱) ب [۲ا + (ن − ۱) ب]

اور کل رقموں کا دو چند مجموعہ = ن [۲ا + (ن − ۱) ب] = ۲ن ا + ن (ن − ۱) ب

اب اسمیں سے اول و آخر رقم کا مجموعہ یعنی ۲ا + (ن − ۱) ب تفریق کرو تو باقی

(ن − ۱) [۲ا + (ن − ۱) ب] اسکو ل² − ا² پر تقسیم کرو تو خارج قسمت ب نکلے گا

(۳۶) ن = م/۲ [۲ا + (م − ۱) ب] ۔۔۔ (۱) م = ن/۲ [۲ا + (ن − ۱) ب] ۔۔۔ (۲)

ان مساواتوں سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ب = −۲(م + ن)/م ن اور ا = (م² + ن² + م ن − م − ن)/م ن اسلئے

م + ن رقموں کا مجموعہ = (م + ن)/۲ [۲ا + (م + ن − ۱) ب]

= (م + ن)/۲ [(۲م² + ۲ن² + ۲م ن − ۲م − ۲ن)/م ن − ۲(م + ن − ۱)(م + ن)/م ن] = −(م + ن)

یا اسطرح عمل کریں کہ م + ن رقموں کا مجموعہ = (م + ن)/۲ [۲ا + (م + ن − ۱) ب] اور

مساوات (۱) اور (۲) کی تفریق کرنے سے ۲(ن − م) = ۲ا (م − ن) + (م − ن)(م + ن) ب

م − ن پر تقسیم کرو تو −۲ = ۲ا + (م + ن − ۱) ب اسواسطے

م + ن رقموں کا مجموعہ = −(م + ن) ابھی ہم نے لکھا ہے کہ −۱ = ا + (م + ن − ۱) ب/۲

اور مساوات (۱) سے ۲ن/م = ۲ا + (م − ۱) ب اسواسطے تفریق کرنے سے

۲ن/م + ۱ = ا + (م − ۱ + ن) ب/۲ اسی ثابت ہوا کہ م − ن رقموں کا مجموعہ = (م − ن) (۱ + ۲ن/م)

(۳۷) فرض کرو کہ اوساط کی تعداد ن ہے اور دوسرا اوسط ۱ + ۲ب اور آخر اوسط ۱۹ − ب

اسلئے ۱ + ۲ب : ۱۹ − ب :: ۱ : ۶ اسواسطے ب = ۱ اور ۱۹ = ۱ + (ن + ۱) ب

اسواسطے ن = ۱۷

(۳۸) ۵۳۵۰ = ن/۲ [۸ + (ن − ۱)] = ن/۲ (ن + ۷) اسلئے ن = ۱۰۰ یا −۱۰۷

(۳۹) فرض کرو کہ تعداد ارقام ۲ن + ۱ ہے تو سلسلہ

ا + (ا + ۲ب) + (ا + ۴ب) وغیرہ کے ن + ۱ رقموں کا مجموعہ ۴۴ ہے اسلئے

۴۴ = (ن + ۱)/۲ [۲ا + ۲ب ن] اور سلسلہ ا + ب + (ا + ۳ب) وغیرہ ن رقموں کا مجموعہ

۳۳ سی اسلئی ۳۳ = ن/۲ [۲ا + ۲ا + ۲(ن − ۱) ب] = ن/۲ [۲ا + ۲ ب ن]

اب تقسیم کرنے سی ۴۴/۳۳ = (ن + ۱)/ن اسواسطے ن = ۳ اور ۲ن + ۱ = ۱۷ اور رقم اوسط

= ا + ن ب = موافق بیان مذکور یہہ = ۴۴/(ن + ۱) = ۱۱

(۴۰) ۱/(ب + ج) و ۱/(ج + ا) و ۱/(ا + ب) سلسلہ حسابیہ مین جب ہونگی کہ ۱/(ب + ج) + ۱/(ا + ب) = ۲/(ج + ا)

یعنے (ج + ا) (ا + ۲ب + ج) = ۲(ب + ج) (ا + ب) یعنے ا۲ + ج۲ = ۲ ب۲ اور یہہ بموجب

فرض کے صحیح ہے

(۴۱) اب یہان رقم اول ۱ ہی اور فرق عام ۲ ہے پس

ص = ن/۲ [۲ + ۲(ن − ۱)] = ن۲

(۴۲) اب اس سوال حل کرنے کی دو ترکیبین ہوسکتی ہین اول یہہ کہ اول سلسلہ ۱ + ۵ + ۹ + وغیرہ کو جمع کرین اور پہر سلسلہ ۳ + ۷ + ۱۱ + وغیرہ کو جمع کرین اور دوسرے مجموعہ کو اول مجموعہ مین سے تفریق کرین

دوسرے یہہ کہ اول دوم رقمون کا مجموعہ − ۲ ہے اور تیسرے اور چوتہی رقمون کا مجموعہ بہی − ۲ ہے اسلئی اگر ن جفت ہو تو مجموعہ − ۲ × ن/۲ یعنی ن ہوگا اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ − (ن − ۱) + رقم اخر یعنی − (ن − ۱) + ۲ن − ۱ یعنی ن ہوگا پس اگر ن جفت ہو تو مجموعہ − ن ہی اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ + ن ہے پس مجموعہ ن (−۱)ن ہے

(۴۳) اسکا حال بہی بیالیسوین مثال کا سا ہی اگر ن جفت ہو تو مجموعہ − ن/۲ ہی اور اگر ن طاق ہو تو مجموعہ (ن + ۱)/۲ ہی − امتحان سی یہہ امر ثابت ہوگا کہ دو نو صورتون مین مجموعہ ۱/۴ [۱ − (۲ن + ۱) (−۱)ن] ہے

(۴۴) ع = ا + (ع − ۱) ب اور ق = ا + (ق − ۱) ب اسواسطے

ا = (ع − ق)/(ع − ق) اور ب = [(ع − ۱) ق − (ق − ۱) ع] / (ع − ق)

ان قیمتون کو ص = ن/۲ [۲ا + (ن − ۱) ب] مین مندرج کرو مطلب حاصل ہے

(۴۵) لا = ا + (ع − ۱) ب اور ر = ا + (ق − ۱) ب اور ی = ا + (ر − ۱) ب ان مساواتون مین سے

اول مساوات سی ع − ۱ = − ا/ب + لا/ب اسواسطے ع = ۱ + (ب − ا)/ب + (لا − ۱) ۱/ب اور علی ہذا القیاس

ق = ۱ + (ل − ک)/ب + (ک − ۱) ل/ب اور ر = ۱ + (ل − ی)/ب + (ی − ۱) ل/ب اسی ثابت ہوتا ہے
کہ یہہ للادین اور یکوین اور روین رقمین اوس سلسلۂ حسابیہ کی ہین جسکی اول رقم ۱ + (ل − ۱)/ب ہے اور
فرق عام ل/ب ہے اور ب × ل/ب = ۱

(۴۶) فرضکرو کہ شکل کے اضلاع ن ہین تو اوسکے تمام زاویون کے تعداد درجہ = ن/۲ [۲۴۰ + ۵ (ن − ۱)]
اور بحکم (۲۳ ش ام) کی زاویون کے درجون کی تعداد = (۲ن − ۴) × ۹۰ پس
ن/۲ [۲۴۰ + ۵ (ن − ۱)] = (۲ن − ۴) × ۹۰ اسواسطے ن۲ − ۲۵ن + ۱۴۴ = ۰
اس مساوات درجہ دوم کی قیمتین ۹ اور ۱۶ ہین دوسری قیمت مساوات مین داخل ہونے کی قابل نہین ہے
اسلئے کہ زاویہ دو قائمون سے بڑا ہوجایگا

(۴۷) پہلی رقم = ۱ + ۱ اور دوسری رقم = ۲۲ + ۲ اور تیسری رقم = ۳۲ + ۳ اور علی ہذا القیاس
پس اب دو سلسلون کا حاصل جمع دریافت کرنا ہے ایک سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + وغیرہ اور دوسرے سلسلہ
۱۲ + ۲۲ + ۳۲ + وغیرہ کا پہلے سلسلہ کا مجموعہ ن(ن + ۱)/۲ ہی اور دوسرے ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)/۶
ان دونو کے جمع کرنے سے یہہ حاصل ہوگا کہ ن(ن + ۱)/۲ [۱ + (۲ن + ۱)/۳] یعنی ن(ن + ۱)(ن + ۲)/۳

(۴۸) (ا + ب)۲ = ا (ا + ۳ب) اسواسطے ب۲ = اب اور ب = ا اسواسطے
(ا + ۵ب)۲ = (ا + ۳ب) (ا + ۸ب)

(۴۹) مج (ن) = ن/۲ [۲ا + (ن − ۱) ب] فرضکرو کہ سلسلہ کے دوسری رقم صہ ہی تو صہ = ا + ب
اسواسطے ب = صہ − ا اور مج (ن) = ن۲ (صہ − ا)/۲ + ن (۳ا − صہ)/۲ اسسے معلوم ہوا کہ
مج (ن + ۳) − ۳ مج (ن + ۲) + ۳ مج (ن + ۱) − مج (ن)
= (صہ − ا)/۲ [(ن + ۳)۲ − ۳ (ن + ۲)۲ + ۳ (ن + ۱)۲ − ن۲]
+ (۳ا − صہ)/۲ [ن + ۳ − ۳ (ن + ۲) + ۳ (ن + ۱) − ن]
یہہ آسانی سے ثابت ہوسکتا ہے کہ یہہ دونو جملے ایک دوسرے کو فنا کرتے ہین

(۵۰) اول رقم = ۵ − ۱/۲ اور فرق عام − ۱/۲ ہے پس

$$س = \frac{ن}{۲}\left[۹ - \frac{ن-۱}{۲}\right] = \frac{ن}{۴}\left[۱۹ - ن\right]$$

(۵۱) فرضکرو کہ حصص مطلوب لا-۳ی و لا-ی و لا+ی و لا+۳ی ہون اور یہہ سلسلہ حسابیہ مین ہین جنکا فرق عام ۲ی ہی اور چونکہ اوسکا مجموعہ ایک ہی اسلیے ۴لا = ۱ اور بس $(لا-۳ی)^۳ + (لا-ی)^۳ + (لا+ی)^۳ + (لا+۳ی)^۳ = \frac{۱}{۱۰}$ اور اوسکا اختصار کرو تو یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ $۴لا^۳ + ۶۰ لا ی^۲ = \frac{۱}{۱۰}$ قیمت لا مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $ی^۲ = \frac{۱}{۴۰۰}$ اسواسطے $ی = ± \frac{۱}{۲۰}$

اب یہان ہم نی مقادیر مجہول کے مقرر کرنے مین ایسی حکمت عملی کی کہ جسسے عمل نہایت آسان ہوگیا اس حکمت کو طالب علم ہمیشہ یاد رکھین - اگر سلسلہ مین تین مقادیر مجہول مقرر کرنی ہون تو بجای لا اور لا+ی اور لا+۲ی کے ہم کو لا-ی اور لا اور لا+ی مقرر کرنی چاہیے اس فرض سی عمل مین نہایت آسانی ہوجائیگی - غرض یہہ حکمت بڑی کام کی ہی - یاد رکھو

(۵۲) فرض کرو کہ اول مہینہ کی تنخواہ ا اور تعداد یا بار ملازمت ن ہی چونکہ اکیلا مرسلہ مین ا+ن-۱ = ۶۰ اور کل مقدار تنخواہ کے ۴۸ن ان مہینون مین ہین اسواسطے $۴۸ن = \frac{ن}{۲}\left[۲ا + (ن-۱)\right]$

یعنی $۴۸ = \frac{۱}{۲}\left[ا + ۶۰\right]$ اسواسطے ا = ۳۶ اور ن = ۲۵

(۵۳) فرضکرو کہ لا گھنٹے بکر چلا تو زید $لا + ۴\frac{۱}{۲}$ گھنٹے چلا اسواسطے

$$۵\left(لا + ۴\tfrac{۱}{۲}\right) = \frac{لا}{۲}\left[۶ + \frac{لا-۱}{۲}\right] = \frac{لا^۲}{۴} + \frac{۱۱لا}{۴} \quad یا \quad لا^۲ - ۹لا - ۹۰ = ۰$$

اسواسطے لا = ۱۵ یا -۶

(۵۴) فرضکرو کہ سب سے پچھلی مزدور نے لا گھنٹہ کام کیا - اور اس پچھلی آدمی نے جسنے پہلی آخر کام شروع کیا اوسنے ۲لا گھنٹہ کام کیا اور علی ہذا القیاس اول آدمی نے رلا گھنٹہ کام کیا تو کل تعداد گھنٹون کی جنمین کام ختم ہوا $\frac{لا ر(ر+۱)}{۲}$ ہی اور بموجب فرض کے یہہ برابر م ر کے ہی اسواسطے $لا = \frac{۲م}{ر+۱}$ اور $رلا = \frac{۲رم}{ر+۱}$

(۵۵) فرضکرو کہ لا سیکڑون کو اور ی دہائیون کو اور ی اکائیون کو تعبیر کرتا ہی تو عدد ۱۰۰لا + ۱۰ی + ی ہوگا اسواسطے ۱۰۰لا + ۱۰ی + ی = ۲۶ (لا + ی + ی) اور

(۱۸) دفعہ ۲۷۳ مین ا = ر اور ب = ر کے رکھو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{ر - ن ر^{ن+1}}{1 - ر} + \frac{ر^2(1 - ر^{ن-1})}{(1-ر)^2}$$

(۱۹) دفعہ ۲۷۳ مین ا = ۱ اور ب = ۱ اور ر = ½ کے رکھو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{1 - \frac{ن}{2^ن}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{ن-1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 - \frac{ن}{2^{ن-1}} + 2\left(1 - \frac{1}{2^{ن-1}}\right) = 4 - \frac{ن+2}{2^{ن-1}}$$

(۲۰) دفعہ ۲۷۳ مین ا = ۱ اور ب = ۲ اور ر = ½ کے رکھو تو

$$\frac{1 - \frac{2ن-1}{2^ن}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1 - \frac{1}{2^{ن-1}}}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 - \frac{2ن-1}{2^{ن-1}} + 4 - \frac{4}{2^{ن-1}} = 6 - \frac{2ن+3}{2^{ن-1}}$$

(۲۱) دفعہ ۲۷۳ مین ا = ۱ اور ب = ۲ اور ر = −½ کے رکھو

$$\frac{1 - \frac{2ن-1}{(-2)^ن}}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{(-2)^{ن-1}}}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} - \frac{2ن-1}{3(-2)^{ن-1}} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9(-2)^{ن-1}}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{6ن+1}{9(-2)^{ن-1}}$$

(۲۲) فرض کرو کہ ا اول رقم اور ح تیسری رقم ہے تو ح = ار^۲ اسواسطے $ر = \pm\sqrt{\frac{ح}{ا}}$
اب اس قیمت کو جملہ مین کہ سلسلہ ہندسیہ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہو مندرج کرو

(۲۳) $(-3)^4 = 81$

(۲۴) فرض کرو کہ سب سے چھوٹا حصہ ا اور اوس سے بڑا ار اور اوس سے بڑا ار^۲ اور سب سے بڑا ار^۳ ہے تو

$ا + ار + ار^2 + ار^3 = 700$ اور $ار^3 - ا = \frac{37}{12}(ار^2 - ار)$

دوسری مساوات سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ $ر^3 - 1 = \frac{37ر(ر-1)}{12}$ اسواسطے $12(ر^2 + ر + 1) = 37ر$

(۲۵) پہلی رقم $-\frac{2}{ا}$ ہے اور نسبت مشترک $-\frac{2}{ا}$ ہے مجموعہ

$$= -\frac{2}{ا}\cdot\frac{1 - \left(-\frac{2}{ا}\right)^ن}{1 + \frac{2}{ا}} = \frac{2}{ا+2}\left[\left(-\frac{2}{ا}\right)^ن - 1\right]$$

(۲۶) $ع = \frac{1}{1 - ر^{ع}}$ اور $ق = \frac{1}{1 - ر^{ق}}$ اور $ع - 1 = \frac{ر^{ع}}{1 - ر^{ع}}$ اور $ق - 1 = \frac{ر^{ق}}{1 - ر^{ق}}$

$$ع^{ق}(ق-1)^{ع} = \frac{ر^{ع ق}}{(1 - ر^{ع})^{ق}(1 - ر^{ق})^{ع}} = ق^{ع}(ع-1)^{ق}$$

(۲۷) دغیرہ ۳۴۳۴ء = ۳۴/۹۹ اور وغیرہ ۶۶۶ء = ۶/۹ = ۲/۳

(۲۸) فرضکرو کہ اول سال میں ا روپیہ بچایا تو دوسرے سال میں $\frac{3}{2}$ ا روپیہ بچایا پس اسی طور تیسرے سال میں $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$ ا یعنے $\frac{9}{4}$ ا روپیہ علے ہذا القیاس اسواسطے

$\frac{\text{ا}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{7}-1\right)}{\frac{3}{2}-1} = 128\frac{11}{16}$ یعنی $2\,\text{ا}\left(\frac{2187}{128}-1\right) = \frac{2059}{64}$ پس

ا = ۴ روپیہ

(۲۹) ان ویں رقم معلوم کو ن وان فرضکرو یعنی $\text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}-1}$ تو (ن + ع) ویں رقم $\text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}+\text{ع}-1}$ ہوگی اور (ن − ع) ویں رقم $\text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}-\text{ع}-1}$ ہوگی اسکا حاصل ضرب $\text{ا}^{2}\,\text{ر}^{2\text{ن}-2}$ اس رقم کے مقدار ہمیشہ ایک ہی ہوگی خواہ ع کچھ ہی ہو

(۳۰) فرض کرو کہ سلسلہ ہندسیہ ا و ا ر و $\text{ا}\,\text{ر}^{2}$ و $\text{ا}\,\text{ر}^{3}$ ... ہے اب ہر رقم کو اپنے مابعد کے رقم سے تفریق کرو تو $\text{ا}(\text{ر}-1)$ اور $\text{ا}\,\text{ر}(\text{ر}-1)$ اور $\text{ا}\,\text{ر}^{2}(\text{ر}-1)$ حاصل ہونگے اور یہہ ہی سلسلہ ضربیہ ہے جسکے نسبت مشترک ر ہے

(۳۱) فرضکرو کہ دو مقدار ا اور ب ہیں تو اونکے اوسط حسابیہ کا مجذور $\left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}\right)^{2}$ ہوگا اور ا^{2} اور ب^{2} کا اوسط حسابیہ $\frac{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}{2}$ ہے اور اوسط ہندسیہ $\sqrt{\text{ا}^{2}\,\text{ب}^{2}}$ یعنی ا ب ہے اور اوسط حسابیہ $\frac{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}{2}$ اور ا ب کا $\frac{1}{2}\left[\frac{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}{2}+\text{ا}\,\text{ب}\right]$ یعنے $\left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{2}\right)^{2}$ ہے

(۳۲) دفعہ ۲۶۴ کے موافق $= \frac{1}{10+1} = \frac{1}{11}$

(۳۳) $\text{ص}_1 = \frac{\text{ا}(\text{ر}-1)}{\text{ر}-1}$ اور $\text{ص}_2 = \frac{\text{ا}(\text{ر}^{2}-1)}{\text{ر}-1}$ اور $\text{ص}_3 = \frac{\text{ا}(\text{ر}^{3}-1)}{\text{ر}-1}$ ...

تو ایسے ن رقموں کا مجموعہ $= \frac{\text{ا}}{\text{ر}-1}\left[\text{ر} + \text{ر}^{2} + \dots + \text{ر}^{\text{ن}} - \text{ن}\right]$

$\frac{\text{ا}}{\text{ر}-1}\left[\frac{\text{ر}(\text{ر}^{\text{ن}}-1)}{\text{ر}-1} - \text{ن}\right] = \frac{\text{ر}\,\text{ا}(\text{ر}^{\text{ن}}-1)}{(\text{ر}-1)^{2}} - \frac{\text{ن}\,\text{ا}}{\text{ر}-1}$

(۳۴) بموجب دفعہ ۲۶۹ کے حاصل ضرب $= \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ر}^{\text{ص}}$ جسمین ص بجای ۱ + ۲ + ... + ن کی ہے یعنی $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ ہے اور $\text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}+1} = \text{ح}$ پس $\text{ر}^{\text{ص}} = \left[\frac{\text{ح}}{\text{ا}}\right]^{\frac{\text{ن}}{2}}$ اور $\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ر}^{\text{ص}} = (\text{ا}\,\text{ح})^{\frac{\text{ن}}{2}}$

(۳۵) $ص = \frac{ا(ر^ن - ۱)}{ر - ۱}$ اور $صَ = \frac{\frac{۱}{ا}(۱ - \frac{۱}{ر^ن})}{۱ - \frac{۱}{ر}} = \frac{(ر^ن - ۱)}{ا\, ر^{ن-۱}(ر - ۱)}$ اسواسطے

$ل صَ = \frac{ا^۲ ر^{ن-۱}(ر^ن - ۱)}{ر^{ن-۱}(ر - ۱)} = \frac{ا^۲(ر^ن - ۱)}{ر - ۱} = ا ص$

(۳۶) $(ا^۲ + ب^۲ + ح^۲)(ب^۲ + ح^۲ + د^۲) = ا^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴)\, ا^۲ ر^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴)$

$= ا^۴ ر^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴)^۲$ اور $(اب + بح + ح د)^۲ = (ا^۲ر + ا^۲ر^۳ + ا^۲ر^۵)^۲ = ا^۴ر^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴)^۲$

(۳۷) $(ا - د)^۲ = ا^۲(۱ - ر^۳)^۲ = ا^۲(۱ - ر)^۲(۱ + ر + ر^۲)^۲$ اور

$(ب - ح)^۲ + (ح - ا)^۲ + (د - ب)^۲ = ا^۲ر^۲(۱ - ر)^۲ + ا^۲(۱ - ر^۲)^۲ + ا^۲(ر - ر^۳)^۲$

$= ا^۲(۱ - ر)^۲\left[ر^۲ + (۱ + ر)^۲ + ر^۲(۱ + ر)^۲\right]$

اور یہہ ظاہر ہے کہ $ر^۲ + (۱ + ر)^۲ + ر^۲(۱ + ر)^۲ = (۱ + ر + ر^۲)^۲$

(۳۸) $ا + ار + ار^۲ = ۱۲۱$ اور $ا + ار + ار^۲ + ار^۳ = ۴۵$

تقسیم $\frac{۱ + ر + ر^۲ + ر^۳}{۱ + ر + ر^۲} = \frac{۴۵}{۲۱}$ اسواسطے $\frac{ر^۳}{۱ + ر + ر^۲۱} = \frac{۲۴}{۲۱} = \frac{۸}{۷}$

اسواسطے $۷ ر^۳ = ۸(۱ + ر + ر^۲)$ اور قیاس سے $ر = ۲$ کے نکال لیں

(۳۹) مجذور کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$ر^۲ + ر^۴ + ر^۶ \dots + ر^{۲ن} + \frac{۱}{ر^۲} + \frac{۱}{ر^۴} + \frac{۱}{ر^۶} \dots \frac{۱}{ر^{۲ن}} - ۲ن$ یعنے

$\frac{ر^۲(ر^{۲ن} - ۱)}{ر^۲ - ۱} + \frac{\frac{۱}{ر^۲}(\frac{۱}{ر^{۲ن}} - ۱)}{۱ - \frac{۱}{ر^۲}} - ۲ن$ یعنی $\frac{ر^{۲ن} - ۱}{ر^۲ - ۱}(ر^۲ + \frac{۱}{ر^{۲ن}})$

(۴۰) $۵ = \frac{۵(۱۰ - ۱)}{۱۰ - ۱}$ اور $۵۵ = \frac{۵(۱۰^۲ - ۱)}{۱۰ - ۱}$ اور $۵۵۵ = \frac{۵(۱۰^۳ - ۱)}{۱۰ - ۱}$ اور علیٰ ہذا

پس سلسلہ $= \frac{۵}{۹}\left[۱۰ + ۱۰^۲ + \dots + ۱۰^ن - ن\right]$

$= \frac{۵}{۹}\left[\frac{۱۰(۱۰^ن - ۱)}{۱۰ - ۱} - ن\right] = \frac{۵۰}{۸۱}(۱۰^ن - ۱) - \frac{۵ن}{۹}$

(۴۱) فرض کرو کہ ایک مقدار لا اور دوسری مقدار ی ہے تو $ا = \frac{لا + ی}{۲}$ اور $ح = \sqrt{لا ی}$

واسطے $ا + ح = \frac{(\sqrt{لا} + \sqrt{ی})^۲}{۲}$ اور $ا - ح = \frac{(\sqrt{لا} - \sqrt{ی})^۲}{۲}$ اسواسطے

$ا^۲ - ح^۲ = \frac{(لا - ی)^۲}{۴}$ اور $\frac{لا - ی}{۲} = \sqrt{ا^۲ - ح^۲}$ اور $لا = ا + \sqrt{ا^۲ - ح^۲}$

اور ی = ۱ - ر ... (۱ - ح²) اسواسطے ا = ± (ا + ح) (ا - ح) سے لا اور ی

دریافت ہو سکتی ہیں

(۴۲) فرضکرو کہ ا اول عدد ار دوسرا عدد ار² تیسرا عدد اور ب چوتھا عدد ہے۔ چونکہ آخر میں عدد

سلسلہ حسابیہ میں ہیں اسلئے ۲ ار² = ار + ب اور ا + ب = ۱۴ اور ار + ار² = ۱۲

اول مساوات میں ب کے جگہہ ۱۴ - ا رکھو تو ۱۴ = ۲ ار² - ار + ا اسواسطے

تقسیم کرنے سے (۲ر² - ر + ۱)/(ر + ر²) = ۱۴/۱۲ = ۷/۶ اسواسطے ۵ ر² - ۱۳ ر + ۶ = ۰

اسواسطے ر = ۲ یا ۳/۵

(۴۳) فرضکرو کہ لا - ی اور لا اور لا + ی اعداد ہیں تو لا - ی + لا + لا + ی = ۱۵

اسواسطے لا = ۵ اور لا - ی + ۱ اور لا + ۴ اور لا + ی + ۱۹ سلسلہ ہندسیہ میں ہیں تو

(لا + ی + ۱) (لا + ی + ۱۹) = (لا + ۴)² یعنے (۶ - ی) (۲۴ + ی) = ۸۱

پس ی² + ۱۸ ی - ۶۳ = ۰ جو قیمت اس مساوات میں داخل ہو سکتی ہے ۳ ہے

(۴۴) اگر ا اور ب اور ح سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ۴/۹ (ا + ب + ح)² = ۴/۹ (ا + (ا+ح)/۲ + ح)²

= ۳ (ا + ح)² اور ا² (ب + ح) + ب² (ح + ا) + ح² (ا + ب) = ب² (ح + ا) + ب (ا² + ح²) + ا ح (ا + ح)

= (ا + ح)³/۴ + (ا + ح) (ا² + ح²)/۲ + ا ح (ا + ح) = (ا + ح)³/۴ + (ا + ح)³/۲ = ۳ (ا + ح)³/۴

اگر ا و ب و ح سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ا² ب² ح² (۱/ا³ + ۱/ب³ + ۱/ح³) = ا² ر⁶ (۱/ا³ + ۱/ا³ر³ + ۱/ا³ر⁶)

= ا³ (ر⁶ + ر³ + ۱) = ا³ + ب³ + ح³

(۴۵) ا ر = ا ر (۱ - ب)/(۱ - ب) اور (ا + ا ب) ر² = ا ر² (۱ - ب²)/(۱ - ب) و (ا + ا ب + ا ب²) ر³ = ا ر³ (۱ - ب³)/(۱ - ب)

اور علی ہذا القیاس ا ر/(۱ - ب) [۱ + ر + ر² + ۰۰] - ا ر ب/(۱ - ب) [۱ + ب ر + ب² ر² + ۰۰]

یعنی ا ر/((۱ - ب)(۱ - ر)) - ا ر ب/((۱ - ب)(۱ - ر ب)) یعنے ا ر/((۱ - ر)(۱ - ب ر))

تیسواں باب

(۱) ۱/۲ + ۵/۶ + ۷/۶ سلسلہ حسابیہ بنتے ہیں اور اونکی اگلے دو قیمتیں ۷/۶ + ۱/۳ اور ۷/۶ + ۱/۳ یعنی ۱۱/۶ اور ۱۳/۶ ہیں

اسسے معلوم ہوا کہ اگلے کے دو رقمیں $\frac{ا ط}{۱۱}$ اور $\frac{۱}{۳}$ ہیں

(۲) ۱ اور ۲۰ کے درمیان ۱۱۸ وساط سلسلہ حسابیہ میں مندرج کرنی چاہیئں ۲۰=۱+۱۱۹ ب

ب=۱ اور سلسلہ حسابیہ میں اوساط ۲ و ۳ و ۴ وغیرہ ہیں اسواسطے اوساط سلسلہ موسیقیہ میں $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ . . . ہیں

(۳) اس سلسلہ موسیقیہ کے مطابق جو سلسلہ حسابیہ لیا جائیگا اوسکی اول رقم $\frac{۱}{ا}$ اور دوسری رقم $\frac{۱}{ب}$ ہوگی

اور ن وین رقم اوسکی $\frac{۱}{ا} + (ن - ۱)\left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا}\right) = \frac{ب + (ن-۱)(ا-ب)}{ا ب}$ ہوگی اسکا

مقلوب $\frac{ا ب}{ب + (ن+۱)(ا-ب)}$ رقم مطلوب ہوگی

(۴) رقم مطلوب کو لا سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ اول رقم ا ہی اور ب

اس سلسلہ موسیقیہ کے مطابق جو سلسلہ حسابیہ لیا جائے اوسکا فرق عام ب ہے۔ تو

$\frac{۱}{ع} = ا + (ع - ۱)$ ب اور $\frac{۱}{ق} = ا + (ق - ۱)$ ب اور $\frac{۱}{لا} = ا + (ع + ق - ۱)$ ب

ا اور ب کو اول اور دوم مساوات سے دریافت کرکے تیسری مساوات میں ان قیمتوں کو مندرج کرو

یا اسطرح عمل کرو کہ اول مساوات کو ع اور دوسرے مساوات کو ق میں ضرب دیکر اور تفریق کرو تو

$\frac{ع}{ع} - \frac{ق}{ق} = (ع - ق)\left[ا + (ع + ق - ۱)ب\right] = (ع - ق) \times \frac{۱}{لا}$

(۵) فرض کرو کہ تین مقادیر معلوم ا و ب و ح ہیں اور لا وہ مقدار ہے جو ہر یکے میں سے تفریق کیجائے

تو ا - لا اور ب - لا اور ح - لا متوالیہ موسیقہ ہوئی اسواسطے $ب - لا = \frac{۲(ا-لا)(ح-لا)}{ا + ح - ۲لا}$

اسسے $لا = \frac{۲ ا ح - ب(ا+ح)}{ا + ح - ۲ب}$ حاصل ہوتا ہے

(۶) فرض کرو کہ مقادیر ا و ب و ح سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو $ب = \frac{۲ ا ح}{ا + ح}$ پس

$ا - \frac{ب}{۲} = \frac{ا^۲}{ا + ح}$ اور $\frac{ب}{۲} = \frac{ا ح}{ا + ح}$ اور $ح - \frac{ب}{۲} = \frac{ح^۲}{ا + ح}$

اور یہہ تینوں ماحصل ظاہر سلسلہ ہندسیہ میں معلوم ہوتے ہیں

(۷) اگر ا و ب و ح سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو $ب = \frac{ا + ح}{۲}$ پس

$ب^۲ - ا ح = \left(\frac{ا + ح}{۲}\right)^۲ - ا ح = \frac{(ا - ح)^۲}{۴}$ بہ نسبت سے

اگر ا و ب و ح سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو $ب^۲ - اح = ۰$ اگر ا و ب و ح سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو $ب^۲ - اح = \frac{۴ ا^۲ ح^۲}{(ا + ح)^۲} - اح = \frac{اح}{(ا + ح)^۲} \left[۴ اح - (ا + ح)^۲ \right]$

$= - \frac{اح (ا - ح)^۲}{(ا + ح)^۲}$ یہہ منفی ہے

(۸) فرض کرو کہ لا اور د اعداد مطلوب ہیں

$\frac{۱}{۲} (لا + د) = ۱۳$ اور $\frac{۲ لا د}{لا + د} = \frac{۸}{۱۳}$

(۹) فرضکرو کہ ا اور ب اعداد کو تعبیر کریں تو اوسط ہندسیہ

$= \sqrt{اب} = \sqrt{\left(\frac{ا + ب}{۲} \times \frac{۲ اب}{ا + ب}\right)}$ اور $\frac{ا + ب}{۲} - \frac{۲ اب}{ا + ب} = \frac{(ا - ب)^۲}{۲ (ا + ب)}$

(۱۰) $ی = \frac{۲ اب}{ا + ب}$ اور $ی - ا = \frac{اب - ا^۲}{ا + ب}$ اور $ی - ب = \frac{اب - ب^۲}{ا + ب}$

$\frac{۱}{ی - ا} + \frac{۱}{ی - ب} = \frac{ا + ب}{ا (ب - ا)} + \frac{ا + ب}{ب (ا - ب)} = \frac{ا + ب}{ب - ا} \left[\frac{۱}{ا} - \frac{۱}{ب} \right] = \frac{ا + ب}{اب} = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب}$

(۱۱) فرض کرو کہ سب سے چھوٹا عدد لا اور اوس سے بڑا د اور سب سے بڑا ی ہے

$د = \frac{۲ لا ی}{لا + ی}$ اور $ی = لا د$ اور $ی + ۱ = لا + د + ی$

اب دو پچھلے مساوات سے قیمت نکال کر اول مساوات میں رکھو تو $د = ۲ لا - ۱$ اور

$لا (۲ لا - ۱) + ۱ = لا + ۲ لا - ۱ + ۲$

(۱۲) فرضکرو کہ لا اور د دو رقمیں ہیں تو $لا + د = \frac{۲۹}{۱۰۴}$ اور $لا د = \frac{۱}{۵۲}$ اسے معلوم ہوا کہ $\frac{۲}{۱۳}$ اور $\frac{۱}{۸}$ رقمیں ہیں اسئے سلسلہ دریافت ہو جایگا

(۱۳) فرضکرو کہ دو عدد ا اور ب ہیں تو $ح_۱ = ا + \frac{ب - ا}{۳}$ اور $ح_۲ = ا + \frac{۲ (ب - ا)}{۳}$

اور $\frac{۱}{ہ_۱} = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{۳} \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا}\right)$ اور $\frac{۱}{ہ_۲} = \frac{۱}{ا} + \frac{۲}{۳} \left(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ا}\right)$ پس

$ح_۱ = \frac{۲ ا + ب}{۳}$ اور $ح_۲ = \frac{۲ ب + ا}{۳}$ اور ان کے درمیان اوسط موسیقیہ

$\frac{۲}{۳} \frac{(۲ ا + ب)(۲ ب + ا)}{(۲ ا + ب + ۲ ب + ا)}$ یعنی $\frac{۲ (۲ ا + ب)(۲ ب + ا)}{۹ (ا + ب)}$ اور نیز

$م_۱ = \frac{۳ اب}{ا + ۲ ب}$ اور $م_۲ = \frac{۳ اب}{۲ ا + ب}$ اور ان کے درمیان اوسط حسابیہ

$= ۱ + \frac{ر(ب-ا)^۲}{اب(ن+۱)} - \frac{ر^۲(ب-ا)^۲}{(ن+۱)^۲ اب}$ پس اب اس جملہ مین ر کی قیمت سے ۱ سے لیکر ن تک صحیح اعداد مقرر کرین تو ایک سلسلہ حاصل ہوگا جسکی جمع ہم کو دریافت کرنی منظور ہے اور وہ سلسلہ یہہ ہے کہ

$$ن + \frac{(ب-ا)^۲}{اب(ن+۱)} \times \frac{ن(ن+۱)}{۲} - \frac{(ب-ا)^۲}{(ن+۱)^۲ اب} \times \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

یعنی $ن\left[۱ + \frac{(ب-ا)^۲}{۲اب} - \frac{(ب-ا)^۲}{۶اب(ن+۱)}(۲ن+۱)\right]$ یعنی $ن\left[۱ + \frac{ن+۲}{ن+۱}\,\frac{(ا-ب)^۲}{۶اب}\right]$

(۱۹) فرضکرو کہ لا اور ء اور ی تین عدد ہین تو $لا + ء + ی = ۳ا^۲ - ب^۲$ اور $لا^۲ + ء^۲ + ی^۲ = ۳ا^۴ + ب^۴$ اور $ء = \frac{۲لای}{لا+ی}$ اول مساوات کا مجذور کرو اور دوم کو اوسے تفریق تو $۲لاء + ۲لای + ۲ءی = ۶ا^۴ - ۶ا^۲ب^۲$

قیمت ء کی مندرج کرو تو $۶لای = ۶ا^۴ - ۶ا^۲ب^۲$ اسواسطے $لای = ا^۴ - ا^۲ب^۲$

اب اول اور دوم مساوات سے ء کو دور کرو تو $لا^۲ + ی^۲ + (۳ا^۲ - ب^۲ - لا - ی)^۲ = ۳ا^۴ + ب^۴$

اسواسطے $۲(لا+ی)^۲ - ۲(۳ا^۲ - ب^۲)(لا+ی) + (۳ا^۲ - ب^۲)^۲ = ۳ا^۴ + ب^۴ + ۲(ا^۴ - ا^۲ب^۲)$

اسواسطے $(لا+ی)^۲ - (۳ا^۲ - ب^۲)(لا+ی) = -۲ا^۴ + ۲ا^۲ب^۲$

اسواسطے $\left(لا + ی - \frac{۳ا^۲ - ب^۲}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۳ا^۲ - ب^۲}{۲}\right)^۲ - ۲ا^۴ + ۲ا^۲ب^۲ = \left(\frac{ا^۲ + ب^۲}{۲}\right)^۲$

اسسے معلوم ہوا کہ $لا + ی = ۲ا^۲$ یعنی $ا^۲ - ب^۲$ پس اول قیمت کام کی ہے اور اوسسے یہہ حاصل ہوتا ہے

$ء = ا^۲ - ب^۲$ اور $لا = ا^۲ \pm اب$ اور $ی = ا^۲ \mp اب$

(۲۰) اول ہم یہہ ثابت کرتے ہین کہ اگر حاصل ضرب (م - ۱) رقموں کا کل رقموں کے حاصل ضرب پر تقسیم کیا جاے تو خارج قسمت مجموعہ اون ارقام کے منکافیون کا ہوگا مثلاً فرض کرو کہ چار رقمین ع و ق و ر و ص ہین تو حاصل جمع تین تین رقموں کے حاصل ضرب کا

$$= ق ر ص + ع ر ص + ع ق ص + ع ق ر = \left(\frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ص}\right) ع ق ر ص$$

پس اگر ہر یک تین رقموں کی حاصل ضرب کو چار رقموں کے حاصل ضرب پر تقسیم کرین تو ہم $\frac{۱}{ع} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ص}$ حاصل ہوگا ۔ اسی معلوم ہوا کہ اس مثال مین ارقام موسیقیہ کے

متر کا عددون کا مجموعہ = ٢ن فرض کرو کہ اس سلسلہ حسابیہ مین فرق عام ب ہے اور پہلے رقم ا ہے اسلئی اوسکا مجموعہ $\frac{ن}{٢}[٢+(ن-١)ب]$ تو یہہ برابر ٢ن کے اسسے معلوم ہوا کہ ب = $\frac{٢}{ن-١}$

تین تیسوان باب

(١) $١+\frac{٣}{٤}$ ؛ ٥ | ٢١ ٣٤ ؛ $\frac{٨}{١}$

$\frac{٢٣٤}{١٠٠٠}\times ٥ = \frac{٢٣٤٢}{٢٠٠٠} = ١\frac{١٧}{١٠٠}$

$\frac{١٧}{١٠٠}\times ٥ = \frac{٨٥}{٢٠} = ٢\frac{١١}{٢٠}$

$\frac{١١}{٢٠}\times ٥ = \frac{١١}{٤} = ٢\frac{٣}{٤}$

$\frac{٣}{٤}\times ٥ = \frac{١٥}{٤} = ٣\frac{٣}{٤}$ وغیرہ

(٢) بجای ٤م+٢ کے ر اور ہندسہ اول ٢م+١ فرض کرو تو عدد ع ر+٢م+١ کے صورت کا ہوگا اور اوسکا مجذور ق ر+(٢م+١)^٢ کی صورت کا ہوگا اب (٢م+١)^٢ = ٤م^٢+٤م+١ = م ر+٢م+١ اسلئی اول ہندسہ ٢م+١ ہوا - اب اول ہندسہ ٢م+٢ فرضکرو تو عدد ع ر+٢م+٢ کی اور اوسکا مجذور ق ر+(٢م+٢)^٢ = ٤م^٢+٨م+٤ = (م+١) ر+٢م+٢ پس اول ہندسہ ٢م+٢ ہے

(٣) اول عدد = ا = $\frac{ا(ر-١)}{ر-١}$ اور دوسرا عدد = ا(ر+١) = $\frac{ا(ر^٢-١)}{ر-١}$ اور تیسرا عدد = ا(١+ر+ر^٢) = $\frac{ا(١-ر^٣)}{١-ر}$ اور علے ہذا القیاس تو مجموعہ = $\frac{ا}{ر-١}[ر+ر^٢+\cdots+ر^ن-ن] = \frac{ا}{ر-١}\left[\frac{ر(ر^ن-١)}{ر-١}-ن\right] = \frac{ا ر}{ر-١}-\frac{ن ا}{ر-١}$

(٤) ح = $\sqrt{م ن}$ اور ح$_١$ = $\frac{م+ن}{٢} = \frac{\sqrt{م}(\sqrt{م}+\sqrt{ن})}{٢}$ اور

م$_١$ = $\frac{٢ن م}{ن+م} = \frac{٢\sqrt{ن}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$ اور ح$_٢$ = $\frac{ن+ن}{٢} = \frac{\sqrt{ن}(\sqrt{م}+\sqrt{ن})}{}$

اور م$_٢$ = $\frac{٢ن ن}{ن+ن} = \frac{٢ن\sqrt{م}}{\sqrt{م}+\sqrt{ن}}$

اسواسطے ح$_١$ م$_٢$ = م ن = ن^٢ = ح$_٢$ م$_١$

(٥) فرضکرو کہ زوان اوسط حسابیہ مین ہے اور روان اوسط موسیقیہ

ر ہے تو س = ب + ر/(ن+۱) (ا-ب) اور ۱/ر = ۱/ا + ر/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا)

اسواسطے ر = (ن+۱) ا ب / ((ن+۱-ر) ب + ر ا) اسواسطے ر س = ا ب اسسے معلوم ہوا کہ مجموعہ

اوساط متناظرہ کی حاصل ضرب کا = ن ا ب اور اول و دو رقموں کے حاصل ضرب سے بھی ا ب

حاصل ہوتا ہے اور آخر دو رقموں کے حاصل ضرب سے ا ب حاصل ہوتا ہے اسلیے سلسلہ کا کل مجموعہ

(ن+۲) ا ب ہے

(۶) فرض کرو کہ اول اوسط موسیقیہ کو لا اور آخر اوسط موسیقیہ کو ی تعبیر کرتا ہے تو

۱/لا = ۱/ا + ۱/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا) اور ۱/ی = ۱/ا + ن/(ن+۱) (۱/ب - ۱/ا) پس

لا = (ن+۱) ا ب / (ن ب + ا) اور ی = (ن+۱) ا ب / (ب + ن ا) فرض کرو کہ ا کم بہ نسبت ب کے ہے اسلیے ا کم ہے ب سے اگر

اور ی - لا = (ن+۱) ا ب (ن-۱) (ب - ا) / ((ن ب + ا) (ن ا + ب)) تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(ن+۱) ا ب (ن-۱) / ((ن ب + ا) (ن ا + ب)) چھوٹا ہے بہ نسبت (ن-۱)/(ن+۱) یعنی (ن+۱)۲ ا ب چھوٹا ہے بہ نسبت (ن ب + ا) (ن ا + ب)

یعنی (ن۲ + ۲ن + ۱) ا ب چھوٹا ہے بہ نسبت (ن۲ + ۱) ا ب + ن (ا۲ + ب۲) یعنی ۲ ا ب چھوٹا ہے بہ نسبت ا۲ + ب۲ کے

اور یہہ ظاہر ہے

(۷) فرض کرو کہ زید لا دن چل چکا تھا کہ بکر نے اوسکو پکڑ لیا تو زید نے لا/۲ (۲ + لا - ۱) میل

مسافت طی کی اور بکر نے ۱۲ (لا - ۵) میل اسواسطے لا/۲ (لا + ۱) = ۱۲ (لا - ۵)

یعنی لا۲ - ۲۳ لا + ۱۲۰ = ۰ اسلیے مساوات درجہ دوم کی قیمت ۸ اور ۱۵ ہین

اسسے معلوم ہوا کہ ۸ دن مین زید کو بکر پکڑ لیگا - اور اگر پہر پہلے قاعدہ کے موافق وہ چلینگے

تو سات دن بعد پہر زید کو بکر پکڑ لیگا

(۸) فرض کرو کہ لا بوتلین ہر دفعہ نکالی گئین تو اول دفعہ نکالنے کے بعد ۲۵۶ - لا بوتلین عرق کے

باقی رہین یعنی ۲۵۶ (۲۵۶ - لا)/۲۵۶ بوتلین اب دوسرے دفعہ مین اگر ۲۵۶ بوتلین نکالین

تو ۲۵۶ - لا بوتلیں عرق کی ہوئین اب ہم نے اوسمین لا بوتلین نکالی ہین

اسلیے لا (۲۵۶ - لا)/۲۵۶ بوتلین عرق کی نکلین اسلیے اوسمین ۲۵۶ - لا - لا (۲۵۶ - لا)/۲۵۶

یعنی $\frac{(لا-۲۵۶)-(لا-۲۵۶)۲۵۶}{۲۵۶} = ۲۵۶ \left(\frac{۲۵۶-لا}{۲۵۶}\right)^۲$ عرق باقی رہا۔

اسی طرح عمل کرنے سے چوتھی مرتبہ میں $۲۵۶ \left(\frac{لا-۲۵۶}{۲۵۶}\right)^۴$ عرق باقی رہیگا اسواسطے

$۲۵۶ \left(\frac{۲۵۶-لا}{۲۵۶}\right)^۴ = ۸۱$ پس $\frac{لا-۲۵۶}{۲۵۶} = \left(\frac{۸۱}{۲۵۶}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۴}$ اسواسطے $لا = ۶۴$

(۹) فرضکرو کہ موہن پاس لا روپیہ اور سوہن پاس ی روپیہ تہا اور موہن $\frac{م}{لا}$ اور سوہن $\frac{م}{ی}$ روپیہ باری میں لگاتے ہیں تو

$\frac{م}{لا} + \frac{م}{ی} = ۹۰$ اور $لا + \frac{م}{ی} = ۵ (ی - \frac{م}{ی})$ اور $ی + \frac{م}{لا} = ۲ (لا - \frac{م}{لا})$

دوسرے مساوات سے $۵ی - لا = \frac{۶م}{ی}$ اور تیسرے مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $۲لا - ی = \frac{۳م}{لا}$

جمع کرنے سے $۵ی - لا + ۴لا - ۲ی = \frac{۶م}{لا} + \frac{۶م}{ی} = ۵۴۰$ پس $لا + ی = ۱۸۰$ اسکو

اول مساوات سے $\frac{لاى}{لا+ى} = م$ تو $= \frac{لاى}{۱۸۰}$ حاصل ہوگا اس م کے قیمت کو دوسرے مساوات میں رکہو

تو $لا = ۱۰۰$ اور $ی = ۸۰$ کے حاصل ہوگا

(۱۰) $\frac{ا+ب+ج}{ج+د+ا} = \frac{ج+د+ب}{ا+ب+د}$ اسواسطے بموجب دفعہ ۳۹۴ کے $\frac{ب-د}{ج+د+ا} = \frac{ج-د}{ا+ب+د}$

اسواسطے $\frac{ب-د}{ج-ا} = \frac{ج+د+ا}{ا+ب+د}$ اسواسطے $\frac{ا+ب+ج-د}{ج-ا} = \frac{ج-ب}{ا+ب+د}$ اسواسطے

$ا + ب + د = \frac{(ج-ا)(ب-ج)}{ا+ب-ج-د}$ اسے طرح ہم ثابت کرسکتی ہیں کہ

$ا + ب + ج = \frac{(ا-د)(ب-د)}{ا+ب-ج-د}$ اسواسطے

$(ا+ب+ج)(ا+ب+د) = \frac{(ا-ج)(ب-ج)(ا-د)(ب-د)}{(ا+ب-ج-د)^۲}$

(۱۱) مساوات $الا^۲ + ۲ب لا + ج = ۰$ کی قیمتیں تاکہ مختلف اور ممکن ہوں ضرور ہے کہ $ب^۲ - اج$ مثبت ہو اور دوسرے مساوات یہہ ہے کہ

$(ا^۲ - اج + ۲ب^۲) لا^۲ + ۲ب (ا+ج) لا + ج^۲ - اج + ۲ب^۲ = ۰$

اب اس مساوات کے مختلف اور ممکن قیمتوں کے ہونے کی لئے ضرور ہے کہ $ب^۲ (ا+ج)^۲ - (ج^۲ - اج + ۲ب^۲)(ا^۲ - اج + ۲ب^۲)$

مثبت ہو اب اس دوسرے جملہ کے تحویل اس صورت $= (ب^۲ - اج) [۴ب^۲ + (ا-ج)^۲]$ میں ہو سکتی ہے

جسکے علامت مستقضاء علامت ب۲ - ۴اح کی ہے اسی ثابت ہوا کہ اگر دونو مساواتوں میں سے
ایک مساوات کی قیمتیں ممکن اور مختلف ہوں تو دوسرے مساوات کی قیمتیں ناممکن ہونگیں

(۱۲) ا + ب = -ح اور لا + ی = -(ی + د) اسواسطے (ا + ب) (لا + ی) = ح ی + ح د
اسواسطے الا + ب ی - ح ی = ح د - ا ی - ب لا ۔۔ (۱) اب √ا لا + √ب ی = -√ح ی
کا مجذور کرو تو ا لا + ب ی + ۲ √ا ب لا ی = ح ی ۔۔ (۲) اب مساوات (۱) کے توسط
سے (۲) مساوات کو اس صورت میں تبدیل کر سکتی ہیں کہ ح د - ا ی - ب لا + ۲ √ا ب لا ی = ۰
اسواسطے √ح د = √ا ی - √ب لا یعنی √(ب لا) - √(ا ی) + √(ح د) = ۰ پس
ہم نے مساوات دوم کو مساوات اول سے استخراج کر لیا اور اسی طرح سے مساوات اول کو مساوات
دوم سے استنباط کر سکتی ہیں

چوبیسوان باب

(۱) $\frac{8!}{3!\,3!} = 1120$ (۲) $\frac{10!}{2!\,2!\,2!} = 453600$

(۳) $\frac{14!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,3!} = 454053600$ (۴) $\frac{11!}{2!\,4!\,4!} = 34650$

(۵) ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳) = ۱۲ ن(ن-۱) اسواسطے (ن-۲)(ن-۳) = ۱۲ اس
مساوات کے قیمت ۶ ہماری مطلب کی ہے

(۶) دس پانسوں میں سے ہر ایک دو پانسوں سے دو چھکی پھینک سکتی ہیں اسلئے یہہ دو چھکی $\frac{9\times10}{2\times1}$ طور سے پھینک سکتی ہیں
اب باقی اٹھہ پانسوں میں سے تین پانسوں سے تین پنجی پھینک سکتی ہیں اسلئے تین پنجی $\frac{6\times7\times8}{3\times2\times1}$ طور سے
اب باقی پانچ پانسوں سے دوئی پھینک سکتی ہیں اسلئے پانچ دوئی $\frac{1\times2\times3\times4\times5}{5\times4\times3\times2\times1}$ طور سے پھینکا سکتے ہیں
اسلئے سب کل طرح پانسوں کی پھینکنی کی $\frac{9\times10}{2\times1}\times\frac{6\times7\times8}{3\times2\times1}\times\frac{1\times2\times3\times4\times5}{5\times4\times3\times2\times1}$

(۷) تین ٹکے کے امرود اٹھارہ آئینگے پس اب سوال یہہ ہے کہ ۲۰ چیزوں میں سے ۱۸ چیزوں کا اجتماع کیا ہوگا
اور بموجب دفعہ ۴۹۵ کے ان اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی جو دو دو اشیا کی یعنی $\frac{19\times20}{1\times2}$ اور جب
ایک خاص امرود ہر دفعہ منتخب کیا جاتا ہے تو باقی ۱۹ امرودوں میں سے ہر ایک سترہ آتے ہیں مگر

پس $\frac{19 \times 18}{2 \times 1}$ طور ہوئی جنمین ایک خاص امرود ہر ایک دفعہ آسکتا ہے

(۸) جب ایک خاص آدمی ہر دفعہ انتخاب کیا جاے تو ہم کو ۹ سپاہی ۹۵ سپاہیونمین سے منتخب کرنے ہین

اور یہہ انتخاب $\frac{95}{9 \; 85}$ اور جب انتخاب مین سے خاص آدمی خارج کیا جاے تو ہم کو ۱۰ آدمی ۹۵ مین سے

منتخب کرنے ہین اسلئے وہ $\frac{95}{10 \; 85}$

(۱۰) بموجب دفعہ ۲۹۵ کے جن اجتماعوں کی تعداد برابر ہے وہ ایک دوسرے کے متمم ہونگے اسلئے ر - ر + ر = ن

(۱۱) جبر مقابلہ مین بارہوین مثال کا حل جوابون مین دیکھو

(۱۲) سوال کی اول حصہ کا جواب یہہ ہے کہ ۹ اشیا مین سے کل اشیا کی کل ترتیبین لیجائین تو وہ ۹ ہونگین

اور دوسرے حصہ کا جواب یہہ ہے کہ وہ ۱۰ ہونگین بشرطیکہ اس بات کو مان لین کہ صفر بائین طرف بھی واقع ہو

لیکن اگر اسکو روا نہ رکھین کہ صفر بائین طرف واقع ہو تو وہ سب ترتیبین نکال ڈالنی چاہین جنمین ایسا ہوا ہو

سب صورتین بموجب حصہ اول سوال کے ۹ ہین یعنی ۱۰ - ۹

(۱۴) اب تین مسلمانون کی جماعتین ہم $\frac{12}{3 \; 9}$ طور سے بنا سکتے ہین اور ہندون کی جماعتین $\frac{16}{4 \; 12}$

اور ان دونو حاصل کا حاصل ضرب تعداد مطلوب ہے

(۱۶) جن اجتماعون کی تعداد برابر ہین وہ ایک دوسرے کے متمم ہین اسلئے ر + ر + ۱ = ن

اور $\frac{\text{ن}}{\text{ر ر+1}} = \frac{5}{4}$ ... $\frac{\text{ن}}{\text{ر-1 ر+2}}$ اسواسطے $\frac{\text{ر+2}}{\text{ر}} = \frac{5}{4}$ اسواسطے ر = ۸

(۱۷) م اشیا مین سے ہم کو $\frac{\text{م}}{\text{ر م-ر}}$ اجتماع ر اشیا کے حاصل ہونگے اور ن چیزون مین سے ہم کو

$\frac{\text{ن}}{\text{ص ن-ص}}$ اجتماع ص اشیا کے ہونگے اور ص + ر اشیا کی ترتیبین اگر وہ سب مختلف ہون تو

ص + ر ہونگین اسلئے تینون کا حاصل ضرب جواب ہوگا

(۱۸) مجسم متوازی السطوح کے تین کنارے ہوتے ہین اسلئے جواب اسکا یہہ ہوگا کہ ان اشیا مین تین تین

کے اجتماع کی تعداد مجسمون کی تعداد ہوگی

(۱۹) ۴ن اشیا مین سے ۲ن اشیا کے اجتماعون کی تعداد $\frac{4\text{ن}}{2\text{ن} \; 2\text{ن}}$ ہے اور ۲ن اشیا مین ن اشیا کے

اجتماعون کی تعداد $\frac{2\text{ن}}{\text{ن} \; \text{ن}}$ اسلئے نسبت مطلوب = $\frac{4\text{ن} \; \text{ن} \; \text{ن}}{2\text{ن} \; 2\text{ن} \; 2\text{ن}}$ ۱ ب

۲ن| = ۱×۳×۵ ... (۲ن−۱) × ۲×۴×۶ ... ۲ن

= ۱×۳×۵ ... (۲ن−۱) ۲^ن ن| اور علےٰ ہذا القیاس

۴ن| = ۱×۳×۵ ... (۴ن−۱) ۲^۲ن ۲ن| جب ان قیمتوں کو مندرج کرو

اور سب کا اختصار کرو تو قیمت مطلوب حاصل ہو جائیگی

(۲۰) ۱۷ انجنوں میں ۱۷×۱۶/۲ اجتماع دو دو کے ہونگے

پس ۱۷×۱۶/۲ ×۵ سے تعداد اون الفاظ کے تعبیر ہوگی جنمیں دو انجن اور ایک سر ہوگا اور تین حرفوں کے ہر یک لفظ میں ۳| ترتیبیں ہونگیں اسلئے ۱۷×۱۶/۲ ×۵ ×۳| یعنی ۴۰۸۰ الفاظ ہونگے

(۲۱) موافق مثال گذشتہ کے ۱۰×۹×۸/۳| × ۴×۳/۲| × ۵| یعنی ۸۶۴۰۰

(۲۲) جب تین حرف ایک ہی اسلوب سے واقع ہوں تو اونکو ایک حرف خیال کرو اور یہہ سمجھو کہ ۵ ہی حرف ہیں تو ۵| جواب ہوگا لیکن اگر تین حرفوں میں ایک ہی اسلوب نہ ہو تو ۵| ۳| الفاظ حاصل ہونگے

(۲۳) فرض کرو کہ ہم چار جھنڈی کام میں لائیں تو تعداد ترتیبوں کی جو ان سے چار چار کی نکالی جائینگی ۱۰×۹×۸×۷ ہونگیں لیکن وہ صورتیں جنمیں صفر بائیں طرف واقع ہو نکال ڈالی جائیں کیونکہ عدد کے بائیں طرف صفر کے کچھہ معنی نہیں ہوا کرتے ۱۰×۹×۸×۷ − ۹×۸×۷ نشان چار جھنڈیوں سے پیدا ہونگے۔ اور اسی طرح سے جب تین جھنڈی کام میں لائینگے تو ۱۰×۹×۸ − ۹×۸ نشان اور جب دو جھنڈی کام میں لائینگے تو ۱۰×۹ − ۹ نشان اور جب ایک جھنڈا کام میں لائینگے تو ۱۰ نشان ہونگے
[illegible] تعداد الفاظ ہوگی

(۲۵) سر جفت مقام پر ۳| طور سے ہو سکتی ہیں اور منجن طاق مقام پر ۳| طور سے ہو سکتے ہیں اسلئے کل تعداد ۳| ۳| ہوگی

(۲۶) اول تین آدمیوں کو جو اونکی طرف مقرر ہیں معین کرو اور ۲ آدمیوں کو جو دوسری طرف مقرر کرو اب باقی تین میں سے ایک آدمی کو پہلی طرف بھیجو تو یہہ ۳ طرح سے ہو سکتا ہے

پس ہر ایک گروہ چار آدمیون کا ۴ا طور سی ترتیب پا سکتا ہی پس کل ترتیبین ۳ × ۴ا × ۴ا ہوئین جنکی موافق ۱۲ا حون کا گروہ مرتب ہو سکتا ہے

(۲۷) اول سوئی ن مختلف مقامون پر رکھی جا سکتی ہی اور اسی طرح سی دوسری سوئی ن مختلف مقامون پر رکھی جا سکتی ہین پس ان دو سوئیون سی ن۲ اشارے ہو سکتی ہین اب تیسری سوئی لو تو اسکا ہر ایک مقام اول اور دوسری سوئی مقامات کے ساتھہ اجتماع پا سکتا ہی اسلیی ن۲ × ن یعنی ن۳ ان تینون سوئیون سی اشارے ہو سکتی ہین علے ہذا القیاس کل نم اشارے ہونگے

(۲۸) ایک بازی تو (۵۲ × ۵۱ × ۵۰ .... × ۴۰) / ۱۳ا طور سی لگی گے اب باقی ۳۹ مین ایک بازی (۳۹ × ۳۸ × ۳۷ .... × ۲۷) / ۱۳ا طورون سی لگیگی — اور علی ہذا القیاس پس کل بازیان ۵۲ا / (۱۳ا)۴ طور سی لگینگے

(۲۹) (۱۰ × ۹ × ۸) / (۱ × ۲ × ۳)

(۳۰) ن − ع نقطون مین سی کوئی سے دو نقطون کا لو تو ((ن − ع)(ن − ع − ۱)) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم ہونگے اور ن − ع نقطون مین سی کوئی نقطہ اور ع نقطون مین سی کوئی نقطہ لو تو (ن − ع) ع خطوط مستقیم ہو اور ع نقطی ایک خط مستقیم مین ہین اسلیی کل تعداد ((ن − ع)(ن − ع − ۱)) / (۱ × ۲) + (ن − ع) ع + ۱ یا اسطرح عمل کرو کہ اگر کوئی تین نقطی ایک خط مستقیم مین نہ ہون تو (ن (ن − ۱)) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم کی تعداد ہوگی اب اگر ع نقطی ایک خط مستقیم مین آجائین تو بجای (ع (ع − ۱)) / (۱ × ۲) خطوط مستقیم کی جو ع نقطون سے پیدا ہوتی ہین ایک خط مستقیم ہو حاصل ہوگا اسلیی ماحصل (ن (ن − ۱)) / (۱ × ۲) − (ع (ع − ۱)) / (۱ × ۲) + ۱ ہوگا یہہ اور پہلے صورت دونو ایک ہی ہین

(۳۱) ن − ع نقطون مین سی کوئی سی تین نقطے لے لو تو ((ن − ع)(ن − ع − ۱)(ن − ع − ۲)) / ۳ا مثلث پیدا ہونگی — ن − ع نقطون مین سی دو نقطی لو اور ع نقطون مین سے ایک نقطہ لو تو (ع (ن − ع)(ن − ع − ۱)) / (۱ × ۲) مثلث پیدا ہونگی اور اب ن − ع نقطون مین سی ایک نقطہ اور ع نقطون مین دو نقطی لو تو (ع (ع − ۱)(ع − ۲)) / (۱ × ۲) مثلث پیدا ہونگی پس ان تینون جملون کا مجموعہ کل مثلثون کی تعداد ہی — یا اسطرح عمل کرو کہ اگر کوئی تین نقطی ایک خط مستقیم مین نہ

تو کل مثلثون کی تعداد $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳!}$ ہوئی اب اگر اسمین سے ع نقطے ایک خط مستقیم مین ہوجائین تو $\frac{ع(ع-۱)(ع-۲)}{۳!}$ مثلث جو ع نقطون سے حاصل ہوتے ہین کم ہوجائینگے

اسلئے کل مثلثون کی تعداد $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳!} - \frac{ع(ع-۱)(ع-۲)}{۳!}$ ہوگی

یہہ حاصل اور پہلا حاصل اسمین مطابقت رکھتے ہین

(۳۲) ۳۱ مثال کی طرح اگر اول طور پر عمل کرین تو یہہ نتیجہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{(ن-ع)(ن-ع-۱)(ن-ع-۲)}{۳!} + \frac{ع(ن-ع)(ن-ع-۱)}{۲\times۱} + \frac{ع(ع-۱)(ن-ع)}{۲\times۱} + ۱$$

اور اگر دوسرے طرح عمل کرین تو یہی نتیجہ اس صورت مین حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳!} - \frac{ع(ع-۱)(ع-۲)}{۳!} + ۱$$

(۳۳) اب خطوط مستقیم کی تعداد $\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}$ ہے اسکی جگہ ف رکھو اب ف خطوط مستقیم سے نقاط تقاطع $\frac{ف(ف-۱)}{۲\times۱}$ پیدا ہونگے لیکن اس سبب سے ن-۱ خطوط مستقیم ان اصلی نقطون کے ہر ایک نقطہ پر گذرتی ہے $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱}$ نقاط تقاطع ان ن نقطون پر منطبق ہوتے ہین پس ان کو خارج کرو تو $\frac{ف(ف-۱)}{۲\times۱} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱}$ نقاط تقاطع ہوئی یعنے

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\left[\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}-۱\right] - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۲\times۱}$$ نقاط تقاطع ہوئی

اسکی تحویل اور اختصار سے $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۸}$ حاصل ہوتا ہے

(۳۴) یہہ ایک مثال دفعہ ۲۹ کی ہے اسواسطے جب ایک دوسرے کشتی اول کشتی کی اوپر نہین سکتی تو اونمین اسمین ترتیبین نہین پیدا ہوتی ہین اوسکا حال ایسا ہے جیسے کہ ایک سے حرفون کا ہے اسلئے تعداد دیکھے $\frac{۲۴!}{۳!\,۳!\,۲!\,۲!\,۲!\,۲!\,۲!\,۲!}$

(۳۵) یہہ سمجھو کہ ۲۰ کتابون کے سات جلدین جدا جدا ہین

(۳۶) اول صرف ایک صورت ایسی ہوسکتی ہے کہ اوسمین کوئی حرف مکرر نہ آئے دوم پانچ صورتین

(۱۲) (ب² + ح²/ب)^ن = ((ب³ + ح³)/ب)^ن اس جملہ کی صورت مفصلہ مین جو ب^ن کا سر ہے وہی ہے جو (ب³ + ح³) مین ہے

(۱۳) (لا + ی)^ن = ط + ص اور (لا − ی)^ن = ط − ص اسواسطے ضرب دینے سے
(لا² − ی²)^ن = ط² − ص²

(۱۴) سیدہی طرح سے عمل کرکے دعوی کو ثابت کرلو یا اسطرح عمل کرو کہ
(۱ + لا)^(ن+۱) (۱ − لا) = (۱ + لا)^ن (۱ − لا²) اسی سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کے کسی قوت کے امثال جو دائین طرف کی جملہ کی صورت مفصلہ مین ہونگی وہی بائین طرف کے جملہ کی صورت مفصلہ مین ہونگے
اٹھائیسواں باب دیکھو اب صورت مفصلہ (۱ + لا)^(ن+۱) (۱ − لا) مین سر لا^(ر+۱) کا اسطرح حاصل ہوگا
کہ (۱ + لا)^(ن+۱) کے صورت مفصلہ مین سے لا کے سر کو لا^(ر+۱) کے سر سے تفریق کرین اور اسیطرح
لا (۱ + لا)^ن (۱ − لا²) کے صورت مفصلہ مین لا^(ر+۱) کا سر اسطرح حاصل ہوگا کہ
(۱ + لا)^ن کے صورت مفصلہ مین لا^(ر+۱) کے سر کو لا^(ر−۱) کے سر مین سے تفریق کرین

(۱۵) رقم اوسط = [۲ن / ([ن [ن) لا^ن اور
[۲ن = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ … (۲ن − ۱) × ۲ن … ۴ × ۲ × ۲ن
= ۱ × ۳ × ۵ … (۲ن − ۱) ۲^ن [ن
اسواسطے [۲ن / [ن = ۱ × ۳ × ۵ … (۲ن − ۱) ۲^ن

(۱۶) فرضکرو کہ صورت مفصلہ (لا + ۲)^ن کی رو ر ین رقم ۲۹۱۶ ہے تو ۲۹۱۶ = [ن / ([ر − ۱ [ن − ر + ۱) لا^(ن−ر+۱) ی^(ر−۱)
اور اسواسطے ۴۸۶۰ = [ن / ([ر [ن − ر) لا^(ن−ر) ی^ر اب تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
۴۸۶۰/۲۹۱۶ = (ن − ر + ۱)/ر · ی/لا اور اسیطرح ۴۳۲۰/۴۸۶۰ = (ن − ر)/(ر + ۱) · ی/لا اور
۲۱۶۰/۴۳۲۰ = (ن − ر − ۱)/(ر + ۲) · ی/لا پس اختصار کرنے سے ۵/۳ = (ن − ر + ۱)/ر · ی/لا
۸/۹ = (ن − ر)/(ر + ۱) · ی/لا اور ۱/۲ = (ن − ر − ۱)/(ر + ۲) · ی/لا ان مساواتون مین سے اول تین
مساواتون کو ر مین ضرب دو اور دوسرے مساوات کو ر + ۱ مین اور تفریق کرو تو

جملہ ثنائی جسمین قوت نما کچھ ہو

۵ر/۳ − ۸(ر+۱)/۹ = ۵/لا اور اسیطرح ۸(ر+۱)/۹ − ر+۲/۲ = ۵/لا اسواسطے

۵ر/۳ − ۸(ر+۱)/۹ = ۸(ر+۱)/۹ − ر+۲/۲ جسے ر=۲ پس ۵/لا = ۲/۳ اور

ق = ۶ اسسے معلوم ہوا کہ لا = ۳ ۱/۲ اور ن = ۱۶ اور ز = ۲ اور اول مساوات مین

ا = ۲ کے معلوم ہوگا

(۱۷) (لا + ۱/لا)^ن = (لا^۲ + ۱)^ن / لا^ن اب اس جملہ کے صورت مفصلہ مین لا کا سر جو ہوگا جو

(لا^۲ + ۱)^ن کے صورت مفصلہ مین لا^ن+ر کا سر ہے — ظاہر ہے کہ

(لا^۲ + ۱)^ن کے صورت مفصلہ مین سب قوا ر لا کے جفت ہین اسلئے ضرور ہے کہ ن + ر جفت عدد ہو

اور (لا^۲ + ۱)^ن کی صورت مفصلہ مین لا^ن+ر کا وہی سر ہے جو (ی + ۱)^ن

کے صورت مفصلہ مین ی^(ن+ر)/۲ کا سر ہے اور یہہ سر [ن / [۱/۲(ن−ر) [۱/۲(ن+ر)] ہے

(۱۸) لا^۲ر+۱ کے وہی امثال ہین جو (لا^۲ − ۱)^۲ن+۱ کی صورت مفصلہ مین لا^۲ر+۲+۲ن+۱ کے امثال ہین

اور یہہ امثال وہی ہین جو (ی − ۱)^۲ن+۱ مین ی^ر+ن+۱ کے امثال ہین

(۱۹) (لا^۲ − ۱)^۲ن کی روسے رقم اول سے اور روسے رقم آخر سے اور رقم متوسط دریافت کرین

اور لا^۲ن پر تقسیم کردین

(۲۰) چونکہ (لا + ا √−۱) (لا − ا √−۱) = لا^۲ + ا^۲ اسسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(لا + ا √−۱)^ن (لا − ا √−۱)^ن = (لا^۲ + ا^۲)^ن

اب (لا + ا √−۱)^ن = ط۰ − ط۲ + ط۴ − … + (ط۱ − ط۳ + ط۵ …) √−۱

(لا − ا √−۱)^ن = ط۰ − ط۲ + ط۴ − … − (ط۱ − ط۳ + ط۵ …) √−۱

اب بائین طرف کے دونو جملون کو آپسمین ضرب دو تو وہ حاصل ضرب

(ط۰ − ط۲ + ط۴ − …)^۲ + (ط۱ − ط۳ + ط۵ …)^۲ ہوگا

اور یہہ برابر ہوگا (ا^۲ + لا^۲)^ن کے

چھتیسوان باب

(۱) $(\text{لا}+1)^{\frac12} = 1 + \text{لا}\,\frac12 + \text{لا}^2\,\frac{\frac12(1-\frac12)}{2} + \text{لا}^3\,\frac{\frac12(1-\frac12)(2-\frac12)}{\lfloor 3} + \cdots$

$= 1 + \frac12\,\text{لا} - \frac18\,\text{لا}^2 + \frac1{16}\,\text{لا}^3 -$ وغیرہ

(۲) $(\text{لا}+1)^{\frac14} = 1 + \text{لا}\,\frac14 + \text{لا}^2\,\frac{\frac14(1-\frac14)}{2} + \text{لا}^3\,\frac{\frac14(1-\frac14)(2-\frac14)}{\lfloor 3} \cdots$

$= 1 + \frac14\,\text{لا} - \frac{3}{32}\,\text{لا}^2 + \frac{7}{128}\,\text{لا}^3 - \cdots\cdots$

(۳) $(\text{لا}+1)^{\frac23} = 1 + \text{لا}\,\frac23 + \text{لا}^2\,\frac{\frac23(1-\frac23)}{2} + \text{لا}^3\,\frac{\frac23(1-\frac23)(2-\frac23)}{\lfloor 3} + \cdots$

$= 1 + \frac23\,\text{لا} - \frac19\,\text{لا}^2 + \frac{4}{81}\,\text{لا}^3 -$ وغیرہ

(۴) $(\text{لا}+1)^{-\frac12} = 1 + \text{لا}(-\frac12) + \text{لا}^2\,\frac{(-\frac12)(-\frac12-1)}{2} + \text{لا}^3\,\frac{(-\frac12)(-\frac12-1)(-\frac12-2)}{\lfloor 3} + \cdots$

$= 1 - \frac12\,\text{لا} + \frac38\,\text{لا}^2 - \frac{5}{16}\,\text{لا}^3 + \cdots$

(۵) $(\text{لا}+1)^{-\frac14} = 1 + \text{لا}(-\frac14) + \text{لا}^2\,\frac{(-\frac14)(-\frac14-1)}{2\times1} + \text{لا}^3\,\frac{(-\frac14)(-\frac14-1)(-\frac14-2)}{\lfloor 3} + \cdots$

$= 1 - \frac14\,\text{لا} + \frac{5}{32}\,\text{لا}^2 - \frac{15}{128}\,\text{لا}^3 + \cdots$

(۶) $(\text{لا}+1)^{-\frac23} = 1 + \text{لا}(-\frac23) + \text{لا}^2\,\frac{(-\frac23)(-\frac23-1)}{2\times1} + \text{لا}^3\,\frac{(-\frac23)(-\frac23-1)(-\frac23-2)}{\lfloor 3} +$

$= 1 - \frac23\,\text{لا} + \frac59\,\text{لا}^2 - \frac{40}{81}\,\text{لا}^3 + \cdots$

(۷) $(\text{لا}-1)^{\frac15} = 1 - \frac15\,\text{لا} - \text{لا}^2\,\frac{\frac15(1-\frac15)}{2\times1} - \text{لا}^3\,\frac{\frac15(1-\frac15)(2-\frac15)}{\lfloor 3} - \cdots$

$= 1 - \frac15\,\text{لا} - \frac{2}{25}\,\text{لا}^2 - \frac{6}{125}\,\text{لا}^3 - \cdots$

(۸) $(2\text{لا}-1)^{\frac34} = 1 - \frac34\,2\text{لا} - (2\text{لا})^2\,\frac{\frac34(1-\frac34)}{2\times1} - (2\text{لا})^3\,\frac{\frac34(1-\frac34)(2-\frac34)}{\lfloor 3} - \cdots$

$= 1 - \frac32\,\text{لا} - \frac38\,\text{لا}^2 - \frac{5}{16}\,\text{لا}^3 - \cdots$

(۹) $\sqrt{(\text{ی}^2-\text{لا}^2)} = \text{ی}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ی}^2}\right)^{\frac12}$

$= \text{ی}\left[1 - \frac12\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ی}^2} + \frac{\text{لا}^4}{\text{ی}^4}\,\frac{\frac12(1-\frac12)}{2\times1} - \frac{\text{لا}^6}{\text{ی}^6}\,\frac{\frac12(1-\frac12)(2-\frac12)}{\lfloor 3} + \cdots\right]$

$= \text{ی}\left[1 - \frac12\,\frac{\text{لا}^2}{\text{ی}^2} - \frac18\,\frac{\text{لا}^4}{\text{ی}^4} - \frac1{16}\,\frac{\text{لا}^6}{\text{ی}^6} - \cdots\right]$

$$\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+1)(\frac{1}{4}+2)\cdots(\frac{1}{4}+ر-1)}{|ر} لا^ر = \frac{1\times5\times9\cdots(4ر-3)}{4^ر\,|ر} لا^ر$$

(۲۱) $\sqrt{24} = (25-1)^{\frac{1}{2}} = 5(1-\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}} = 5\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{25}-\frac{1}{8}(\frac{1}{25})^2\cdots\right]$

(۲۲) $\sqrt[3]{999} = (1000-1)^{\frac{1}{3}} = 10(1-\frac{1}{1000})^{\frac{1}{3}}$

$= 10\left[1-\frac{1}{3}\frac{1}{1000}-\frac{1}{9}(\frac{1}{1000})^2\cdots\right]$

(۲۳) $\sqrt[5]{31} = (32-1)^{\frac{1}{5}} = 2(1-\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} = 2\left[1-\frac{1}{5}\frac{1}{32}-\frac{2}{25}(\frac{1}{32})^2\cdots\right]$

(۲۴) $\sqrt[5]{(99000)} = (100000-1000)^{\frac{1}{5}} = 10(1-\frac{1}{100})^{\frac{1}{5}}$

$= 10\left[1-\frac{1}{5}\frac{1}{100}-\frac{2}{25}(\frac{1}{100})^2\cdots\right]$

(۲۵) $(1+لا)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}لا-\frac{1}{8}لا^2\cdots$ اور $(1-لا)^{\frac{3}{2}} = 1-\frac{3}{2}لا+\frac{3}{8}لا^2-\frac{1}{16}لا^3\cdots$

پس جملہ $= \frac{1+\frac{1}{2}لا-\frac{1}{8}لا^2+1-\frac{3}{2}لا+\frac{3}{8}لا^2\cdots}{1+لا+1+\frac{1}{2}لا-\frac{1}{8}لا^2\cdots}$

$= \frac{2-لا+\frac{1}{4}لا^2\cdots}{2+\frac{3}{2}لا-\frac{1}{8}لا^2\cdots} = \frac{1-\frac{1}{2}لا+\frac{1}{8}لا^2\cdots}{1+\frac{3}{4}لا-\frac{1}{16}لا^2\cdots}$

اب اگر شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کریں تو اول دو رقمیں خارج قسمت میں $1-\frac{5}{4}لا$ نکلینگی

(۲۶) ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{ن}{1}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{|3}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)(ن-4)}{|5}+\cdots$$

زیادہ $\frac{ن(ن-1)}{1\times2}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{|4}+\cdots$ سے بقدر واحد کے ہے

یعنے ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے

$$ن-\frac{ن(ن-1)}{2\times1}+\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{|3}-\frac{ن(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{|4}+\cdots$$

برابر واحد کے ہے اور یہہ ظاہر ہے کیونکہ یہہ جملہ $= 1-(1-1)^ن$

(۲۷) بموجب دفعہ ۲۲۳ کے تعداد $= \frac{ن(ن+1)\cdots(2ن-1)}{|ن}$ دونو نسب نما اور شمار کنندہ کو

$|ن-1$ میں ضرب دو تو $\frac{|2ن-1}{|ن\,|ن-1}$

(۲۸) (ر+۱) ویں رقم رویں رقم کو $(\frac{ن+1}{ر}-1)$ لا میں ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے

اب دونو شمار کنندہ اور نسب نما کو [۲ن - ۱ مین ضرب دو تو سر یہہ ہوجائیگا کہ (ع + ن - ۱) / ([ع - ن [۲ن - ۱) اور [ع - ن کے ساقط کرنے سے سر کی یہہ صورت ہوگی کہ

(ع - ن + ۱) (ع - ن + ۲) . . (ع + ن - ۱) / [۲ن - ۱

اب شمار کنندہ کی اجزاء ضربی مین بیچ کے رقم ع ہی اور اوسکی ادہر اودہر ع + ۱ اور ع - ۱ مین اور اوسکا حاصل ضرب ع۲ - ۱ ہے اور آگے اسی پر قیاس کرو

(۳۶) ہم کو لان کا سر اس جملہ

(۱ - ۶لا + ۱۲لا۲ - ۸لا۳) (۱ - ۳لا۲)−۴ مین دریافت کرنا ہے

ظاہر ہے کہ (۱ - ۳لا۲)−۴ کے صورت مفصلہ مین لا کے قوا جفت ہونگی پس (۱ + ۱۲لا۲) (۱ - ۳لا۲)−۴ مین لا کی جفت قوتین واقع ہونگیں لان کا سر (۱ - ۳لا۲)−۴ مین (۴ × ۵ × ۶ . . (ن + ۴ - ۱)) / [ن ۳ن

یعنی ((ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) / [۳) ۳ن/۲ اور سر لان−۲ کا (ن (ن + ۱) (ن + ۲) / [۳) ۳ن/۲ − ۱ آخر کو ہم کو یہہ

((ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) / [۳) ۳ن/۲ + (۱۲ن (ن + ۱) (ن + ۲) / [۳) ۳ن/۲ − ۱

یعنی . ((ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) / ۲) ۳ن/۲ − ۱

(۳۷) ہم کو لان کا سر صورت مفصلہ (۱ + ۲لا + لا۲) (۱ - لا)−۴ مین دریافت کرنا ہی تو بموجب مثال ۳۴ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

(ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) / [۳ + ۲ن (ن + ۱) (ن + ۲) / [۳ + (ن - ۱) ن (ن + ۱) / [۳

اور یہہ برابر ہے (ن + ۱)/۳ . (۲ن۲ + ۴ن + ۳)

(۳۸) ((ا + لا) / (ا - لا))½ = (ا + لا) / (ا۲ - لا۲)½ = (ا + لا) (ا۲ - لا۲)−½ = (۱ + لا/ا) (۱ - لا۲/ا۲)−½

پس اب ہم کو (۱ - لا۲/ا۲)−½ کی تفصیل قوای لا/ا مین کرنی چاہیے اور ماحصل کو ۱ + لا/ا مین ضرب دینا چاہی — اسسے معلوم ہوا کہ اصل جملہ مین لار کے سر دریافت کرنے کے لیئے لار کا سر (۱ - لا۲/ا۲)−½ مین دریافت کرنا چاہیے اور لار+۱ سر اصل جملہ مین

معلوم کرنے کے لئے $(۱-\frac{لا}{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ مین $لا^{ر}$ کا سر دریافت کرنا چاہئے اور $\frac{۱}{۲}$ مین ضرب دینا چاہئے

(۳۹) ن واں سر $= \frac{ن(ن+۱)\cdots(ن+ن-۲)}{|ن-۱} = \frac{۲ن(ن+۱)\cdots(ن+ن-۳)}{|ن-۲}$

(۴۰) صورت مفصلہ $(۱+لا)^{۲ر}$ کی رقم اوسط

$$= \frac{۲ر(۲ر-۱)\cdots(۲ر-ر+۱)}{|ر} لا^{ر} = \frac{|۲ر}{|ر\ |ر} لا^{ر}$$

$$= \frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲ر-۱)\ ۲^{ر}\ |ر}{|ر\ |ر} لا^{ر}$$

$$= \frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲ر-۱)}{|ر} ۲^{ر}\ \ لا^{ر}$$

اور صورت مفصلہ $(۱-۴لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ مین $لا^{ر}$ کا سر

$$= \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}+۱)(\frac{۱}{۲}+۲)\cdots(\frac{۱}{۲}+ر-۱)}{|ر}(۴لا)^{ر}$$

$$= \frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲ر-۱)}{|ر} ۲^{ر}$$

(۴۲) فرض کرو کہ ہم $(۱+لا)^{ن}$ اور $(۱+\frac{۱}{لا})^{ن}$ کی صورت مفصلہ لکھیں اور دونو سلسلوں کو آپس مین ضرب دیں تو جس رقم مین لا نہ ہوگا وہ

$$۱+\left[\frac{ن}{۱}\right]^{۲}+\left[\frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱}\right]^{۲}+\left[\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{|۳}\right]^{۲}+\cdots$$

اسسے ثابت ہوتا ہے کہ $(۱+لا)^{ن}$ مین سروں کے مربعوں کا مجموعہ برابر ہوتا ہے اوس رقم کی سر کے جو $(۱+لا)^{ن}(۱+\frac{۱}{لا})^{ن}$ یعنے $\frac{(۱+لا)^{۲ن}}{لا^{ن}}$ کے صورت مفصلہ مین لا نہیں رکھتی ۔ اب اس جملہ کی صورت مفصلہ میں جس رقم مین لا شامل نہیں ہے اوسکا سر وہی ہے جو $لا^{ن}$ کا سر صورت مفصلہ $(۱+لا)^{۲ن}$ مین ہے اور اسیواسطے وہ $\frac{|۲ن}{|ن\ |ن}$ ہے

(۴۳) یہہ بظاہر معلوم ہوتا ہے کہ $ع_{ر}$ سر $لا^{ر}$ کا صورت مفصلہ $(۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ کا ہے پس

$$(۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}}=۱+ع_{۱}لا+ع_{۲}لا^{۲}+ع_{۳}لا^{۳}+\cdots+ع_{ر}لا^{ر}+ع_{ر+۱}لا^{ر+۱}+\cdots$$

اسسے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ہم $(۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}}$ کو فی نفسہ ضرب دین تو $لا^{ن+۱}$ کا حاصل ضرب یہ ہے

$$۲\left[ع_{۲ن+۱}+ع_{۱}\ ع_{۲ن}+\cdots+ع_{ن-۱}\ ع_{ن+۲}+ع_{ن}\ ع_{ن+۱}\right]-$$

لیکن $(۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}} \times (۱-لا)^{-\frac{۱}{۲}} = (۱-لا)^{-۱} = ۱ + لا + لا^{۲} + \dots + لا^{ن+۱} + \dots$

اسے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $۲\,[ع_ن ع_{ن+۱} + ع_۱ ع_{ن-۱} + \dots + ع_{ن-۱} ع_۱ + ع_{ن+۱} ع_ن] = ۱$

(۴۴) صورت مفصلہ $(۱-لا)^{-ن-۱}$ مین $لا^{م}$ کا سر

$$= \frac{(ن+۱)(ن+۲)\dots(ن+م)}{\lfloor م} = \frac{\lfloor ن+م}{\lfloor ن \lfloor م}$$

اور $(۱-لا)^{-م-۱}$ مین بہی $لا^{ن}$ کا سر یہی ہوگا

(۴۵) $۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + \dots = (۱-لا)^{-۲}$

پس ہم کو $لا^{ر}$ کا سر صورت مفصلہ $(۱-لا)^{-۲ن}$ مین دریافت کرنا ہے اور یہہ

$$\frac{۲ن(۲ن+۱)\dots(۲ن+ر-۱)}{\lfloor ر} \text{ ہے}$$

سینتیسوان باب

(۱) ق + ۲ر = ۴ اور ع + ق + ر = ۳ اب حل ان مساواتون کے یہہ ہین کہ ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = ۰ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = ۰

$$\frac{\lfloor ۳}{\lfloor ۲} + \frac{\lfloor ۳}{\lfloor ۲} = ۳ + ۳ = ۶$$

اینده ہم مساواتون کے حل کرنے مین جو قیمتین صفر ہونگین اونکو نہین لکھینگے

(۲) ق + ۲ر = ۵ اور ع + ق + ر = ۴

ر = ۲ اور ق = ۱ اور ع = ۱ اور ر = ۱ اور ق = ۳

$$\frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲}(-۱)^{۱} + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۳}(-۱)^{۳} = -۱۲ - ۴ = -۱۶$$

(۳) ق + ۲ر + ۳ص = ۸ اور ع + ق + ر + ص = ۴

ص = ۲ اور ر = ۱ اور ع = ۱ اور ص = ۲ اور ق = ۲ اور ر = ۲ اور ق = ۱ اور ر = ۱

$$\frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲}۳^{۲}(-۴)^{۱} + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲\lfloor ۲}(-۲)^{۲}(-۴)^{۲} + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۲}(-۲)^{۲}۳(-۴) + \frac{\lfloor ۴}{\lfloor ۳}۳^{۳}$$

$$= ۱ \times ۳^{۴} \times ۲^{۴} + ۳ \times ۲^{۴} + ۲^{۵} \times ۳^{۲} + ۳^{۴} = ۱۹۰۵$$

(۴) ق + ۲ر + ۳ص + ۴ط + ۵ش = ۱۴ اور ع + ق + ر + ص + ط + ش = ۳

(۱۵) ۵+۲ ر = ۴ اور ع + ق + ۱ = ن

ر = ۲ اور ع = ن - ۲ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = ن - ۳ اور ق = ۴ اور ع = ن - ۴

ن (ن - ۱) / ۲ + ن (ن - ۱) (ن - ۲) / ۲ + ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳) / ۲۴ = ن۴ + ۴ ن۳ - ۱۳ ن۲ + ۶ ن / ۲۴

(۱۶) باسانی یہ امر دریافت ہو سکتا ہے کہ ۱ + ۳ لا + ۵ لا۲ + ۷ لا۳ + ۹ لا۴ + ۰۰

= (۱ + لا) (۱ + ۲ لا + ۳ لا۲ + ۴ لا۳ + ۵ لا۴ ۰۰۰) = (۱ + لا) (۱ - لا)^-۲

سے معلوم ہوا کہ ہم لا کا سر (۱ + ۷ ع) (۱ - لا)^-۱۴ میں دریافت کرنا چاہتے ہیں اب عامل کثیر جملہ ثنائیہ کے دو اجزاء ضربی کو موافق مسئلہ جملہ ثنائیہ کے پہلا کر ضرب دیں یا دستور کے موافق مطلق کثیر

ق + ۲ ر + ۳ ص + ۴ ط = ۴ اور ع + ق + ر + ص + ط = ۷

ط = ۱ اور ع = ۶ اور ص = ۱ اور ق = ۱ اور ع = ۵ اور ر = ۲ اور ع = ۵

اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = ۴ اور ق = ۴ اور ع = ۳

۹ لا۶/لا۶ + ۹ لا۶/لا۵ × ۷ × ۳ + ۵ لا۶/لا۵ لا۲ × ۷ ۲ + ۵ × لا۶/لا۳ لا۴ ۲

حاصل ۴۰۳۰ ہے

(۱۷) ۱ + لا + لا۲ + لا۳ + ۰۰ = (۱ - لا)^-۱ پس ہم کو لا کا سر (۱ - لا)^-۲ میں دریافت کرنا ہے اور یہ باسانی م + ۱ معلوم ہو سکتا ہے اور اگر ہم دستور کے موافق عمل کریں تو ق + ۲ ر + ۳ ص + ۴ ط + ۵ ش ۰ ۰ = م اور ع + ق + ر + ۰ ۰ = ۲ اب یہ باسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر م = ۳ تو سر ۴ ہوگا اور اگر م = ۴ تو سر ۵ ہوگا اور اگر م = ۵ تو سر ۶ ہوگا اور علے ہذا القیاس

(۱۸) ق + ۲ ر = ۸ اور ع + ق + ر = ن

ر = ۴ اور ع = ن - ۴ اور ر = ۳ اور ق = ۲ اور ع = ن - ۵

ر = ۲ اور ق = ۴ اور ع = ن - ۶ اور ر = ۱ اور ق = ۶ اور ع = ن - ۷

ق = ۸ اور ع = ن - ۸ سے نتیجہ مطلوب حاصل ہے

م ا۱ + م (م-۱) ا۱ ا۲ + م (م-۱) (م-۲) / |۳ ا۳

(۲۵) |۵ / |۳ = ۲۰

(۲۶) |۷ / (|۲ |۳ |۲) (-۱)^۲ (-۱)^۳ = -۲۱۰

(۲۷) |۹ / (|۲ |۴ |۳) = ۱۲۶۰

(۲۸) |۱۰ / (|۲ |۳ |۴) (۲)^۲ (-۱)^۴ = ۱۲۶۰۰

(۳۱) ہر سر |۱۰ / (|ع |ق |ر) کی صورت کا ہے جسمین ع + ق + ر = ۱۰ اب یہہ ظاہر ہے کہ کم از کم قیمت |ع |ق |ر کی ۱×۱×۱×۲×۲×۲×۳×۳×۳×۴ ہے کیونکہ وہ اول کم از کم دس اجزاء ضربی سے بنائی گئی ہے جو داخل ہی ہو سکتی ہین اور یہہ اجزاء ضربی کم از کم اس وجہ سے ہین کہ صرف تین مقدارین ع اور ق اور ر ہین تین سے زیادہ واحد اور تین سے زیادہ دو اور تین سے زیادہ تین نہین لے سکتی ہین پس سب سے بڑا سر |۱۰ / (|۳^۳ × ۴) ہے

(۳۲) ہر ایک سر اس صورت کا |۱۴ / (|ع |ق |ر |ص) ہے جسمین ع + ق + ر + ص = ۱۴ اب یہہ ظاہر ہے کہ کم از کم قیمت |ع |ق |ر |ص کی ۱×۱×۱×۱×۲×۲×۲×۲×۳×۳×۳×۳×۴×۴ ہے کیونکہ وہ چودہ اجزاء اول کم از کم اجزاء ضربی سے بنایا گیا ہے جو داخل ہو سکتی ہین اور اونکی کم از کم ہونے کے یہہ وجہ ہے کہ ہم یہہ چار سے زیادہ واحد اور چار سے زیادہ دو اور چار سے زیادہ تین نہین لے سکتی پس سب سے بڑا سر |۱۴ / (|۳^۴ × ۴^۲) ہے

(۳۳) مثال ۳۱ اور ۳۲ پر قیاس کرکے اس مثال کو آسانی سے حل کر سکتے ہو

(۳۴) ا۰ + ا۱ لا + ا۲ لا^۲ + ۰۰ لکھو اور اسکے نیچے یہی سلسلہ لکھو اور ایسے دونوں کو ضرب دو اور ماحصل کو ترتیب سے لکھو تو لا^۲ اور لا^۳ اور لا^۴ ۰۰ کی سرون کو ہم امتحان کرکے آسانی سے یہہ امر کہہ دینگے کہ نتیجہ صحیح ہے مثال ۱۷ خاص صورت اس مثال کی ہے اور چھتیسوین باب کی ۳۴ مثال بھی دیکھو

(۳۵) اول رقم صورت مفصلہ کی ا ہے

ر = ۱ اور ع = -۲ اور ن = ۲ اور ع = -۳

(-۱) اؔ۲ ح + (-۱)(-۲)/۲! اؔ-۳ بؔ = -اؔ۲ ح + اؔ-۳ بؔ

لاؔ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر = ۳ اور ع + ق + ر = -۱

ر = ۱ اور ق = ۱ اور ع = -۳ اور ق = ۳ اور ع = -۴

(-۱)(-۲) اؔ-۳ ب ح + (-۱)(-۲)(-۳)/۳! اؔ-۴ بؔ۳ = ۲ اؔ-۳ ب ح - اؔ-۴ بؔ

لاؔ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر = ۴ اور ع + ق + ر = -۱

ر = ۲ اور ع = -۳ اور ر = ۱ اور ق = ۲ اور ع = -۴ اور ق = ۴ اور ع = -۵

(-۱)(-۲)/۲! اؔ-۳ حؔ۲ + (-۱)(-۲)(-۳)/۲! اؔ-۴ بؔ۲ ح + (-۱)(-۲)(-۳)(-۴)/۴! اؔ-۵ بؔ۴

= اؔ-۳ حؔ۲ - ۳ اؔ-۴ بؔ۲ ح + اؔ-۵ بؔ۴

یا اس طرح عمل کریں کہ

(ا + ب لا + ح لاؔ۲)^-۱ = اؔ-۱ (۱ + ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا)^-۱

= اؔ-۱ [۱ - (ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا) + (ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا)^۲ - (ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا)^۳ + (ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا)^۴ -

اب مختلف قوائم ب لا/ا + ح لاؔ۲/ا کو تبلاؤ

(۳۷) صورت مفصلہ کی اول رقم ا ہے

لاؔ کے سر دریافت کرنے کیواسطے

ق + ۲ر + ۳ص = ۱ اور ع + ق + ر + ص = ن

ق = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ن (-۱) = -ن

لاؔ کے سر دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر + ۳ص = ۲ اور ع + ق + ر + ص = ن

ر = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ق = ۲ اور ع = ن - ۲

$ن(-۱) + \frac{ن(ن-۱)}{۲}(-۱)^{۲} = -ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲} = \frac{ن(ن-۳)}{۲}$

$لا^{۳}$ کے امثال دریافت کرنے کے واسطے

ق + ۲ر + ۳ص = ۳ اور ع + ق + ر + ص = ن

ص = ۱ اور ع = ن - ۱ اور ر = ۱ اور ق = ۱ اور ع = ن - ۲ اور ق = ۳ اور ع = ن - ۳

$ن(-۱) + ن(ن-۱)(-۱)(-۱) + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳}(-۱)^{۳} = -ن + ن(ن-۱) - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳}$

$= -\frac{ن}{۶}(ن-۲)(ن-۷)$

(۳۸) یہہ نتائج استقرا سے قائم ہوسکتی ہین - اسال کی لئی ایک خاص قیمت ر کی مقرر کرو اور یہہ امر تحقیق ہوجایگا کہ جو استدلال ایک خاص قیمت پر کرنے سے نتیجہ پیدا ہوتا ہے وہی کوئی اور ر کی قیمت مقرر کرنے سے پیدا ہوگا - ہم ثابت کرسکتی ہین کہ ضرب کے کرنے سے جو قوانین کہ ن = ۲ فرض کرنے سے دریافت ہوتے ہین وہی اوس صورت مین بھی کہ ن = ۳ کے فرض کرین فرضکرو کہ وہ ن کے کسی قیمت کے مقرر کرنے سے قائم ہوتے ہین اور ر = ۳ اور

$(۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳})^{ن} = ا_{۰} + ا_{۱}لا + ا_{۲}لا^{۲} + \dots + ا_{۳ن-۱}لا^{۳ن-۱} + ا_{۳ن}لا^{۳ن}$

طرفین کو $۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳}$ مین ضرب دو تو

$(۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳})^{ن+۱} = ا_{۰} + (ا_{۰} + ا_{۱})لا + (ا_{۲} + ا_{۱} + ا_{۰})لا^{۲} + (ا_{۳} + ا_{۲} + ا_{۱} + ا_{۰})لا^{۳}$
$+ (ا_{۴} + ا_{۳} + ا_{۲} + ا_{۱})لا^{۴} + \dots$

اب ہم دیکھتے ہین کہ $لا^{۴}$ کا سر ٹرا بہ نسبت $لا^{۳}$ کے سر کے ہے بشرطیکہ $ا_{۴}$ ٹرا $ا_{۰}$ سے اور یہہ بموجب فرض کے ہے - اور علے ہذا القیاس

اڑتیسوان باب

(۱) فرضکرو کہ لوکارثم مطلوب لا ہے تو $۱۴۴ = (۲\sqrt{۳})^{لا}$ یعنے $۲^{۴} \times ۳^{۲} = (۲ \times \sqrt{۳})^{لا}$ یعنی $(۲\sqrt{۳})^{۴} = (۲\sqrt{۳})^{لا}$ اسواسطے لا = ۴

(۲) ۷ درمیان ۲ اور ۲ کے واقع ہے اسلئی عدد بیانی ۲ ہے

(۳) ۵ درمیان ۳ اور ۳ کے واقع ہے اسلئی عدد بیانی ا ہے

(۴) فرضکرو کہ لوکارثم مطلوب لا ہے تو ۵ = ۱۵ ۳ یعنی ۵ = ۵ اسواسطے لا = ۵

(۵) ۰۲۳ ۱۲ اور ۱۲۳ ۰۰ درمیان ۱۰ اور ۱۰ کے واقع ہیں اسواسطے عدد بیانی ۳ ہے اور ۰۰۱۲۳ درمیان ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے اسواسطے عدد بیانی -۲ ہے

(۶) لوگ ۰۵ = لوک ۵/۱۰۰ = لوک ۵ - لوک ۱۰۰ = لوک ۵ - ۲ اور لوک ۵ = لوک ۱۰/۲
= لوک ۱۰ - لوک ۲

اور لوگ ۴۵ء۵ = لوگ ۵۴/۱۰ = لوک ۵۴ - ۱ اور لوگ ۵۴ = لوگ ۳۳ × ۲ پس لوک ۵۴ = ۳ لوک ۳ + لوک ۲

(۷) لوک ۰۰۶ء = لوک ۶/۱۰۰۰ = لوک ۶ - ۳ اور لوک ۶ = لوک ۲ + لوک ۳

(۸) لوک ۳۶ = لوک (۲۲ × ۳۲) = ۲ لوک ۲ + ۳ لوک ۱۲ اور لوک ۲۷ = لوک ۳۳ = ۳ لوک ۳ اور لوک ۱۶
= لوک ۲۴ = ۴ لوک ۲

(۹) ۶۴۸ کو ۲ پر تقسیم کرو اور پھر خارج قسمت کو ۲ پر اور تقسیم جہانتک ممکن ہے جاری رکھو پھر ۳ پر تقسیم کرو اور خارج قسمت جو نکلے پھر اوسے ۳ پر تقسیم کرو جہانتک ممکن ہو تو یہہ معلوم ہوگا کہ ۶۴۸ = ۲۳ × ۳۴ اور ایسی ہی ۸۶۴ = ۲۵ × ۳۳ اسواسطے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
۳ لوک ۲ + ۴ لوگ ۳ = ۲۸۱۱۵۷۵۰ء۱ اور ۵ لوک ۲ + ۳ لوک ۳ = ۲۶۹۳۶۵۱۳۷۴ء۲
ان دو مساواتوں سے لوگ ۲ اور لوک ۳ معلوم کرو اور لوک ۵ = لوک ۱۰/۲ = ۱ - لوک ۲

(۱۰) لوگ ۴√۱ء۲۵ = لوگ ۴√(۱۲۵/۱۰۰) = ۱/۴ (لوک ۱۲۵ - لوک ۱۰۰) = ۳/۴ لوگ ۵ - ۱
= ۳/۴ (۱ - لوگ ۲) - ۱

(۱۱) لوگ ۰۰۲۵ء = لوک ۲۵/۱۰۰۰۰ = لوک ۲۵ - ۴ = ۲ لوک ۵ - ۴ = ۲ (۱ - لوک ۲) - ۴

(۱۲) لوگ ۳√۰۱۲۵ء = لوک (۱۲۵/۱۰۰۰۰)^(۱/۳) = ۱/۳ (لوگ ۱۲۵ - لوگ ۱۰۰۰۰)
= لوگ ۵ - ۴/۳ = ۱ - لوک ۲ - ۴/۳

(۱۹) فرض کرو کہ $ن = ا^{لا} = ب^{ی} = ح^{ی}$ تو $لا =$ لوگ$_{ا}$ اور $ی =$ لوگ$_{ب}$ ن تو

$ا = ن^{\frac{1}{لا}}$ اور $ب = ن^{\frac{1}{ی}}$ اور $ح = ن^{\frac{1}{ی}}$ لیکن $ب^{۲} = اح$ اسواسطے

$ن^{\frac{2}{ی}} = ن^{\frac{1}{لا} + \frac{1}{ی}}$ اسواسطے $\frac{2}{ی} = \frac{1}{لا} + \frac{1}{ی}$

(۲۰) فرض کرو کہ ابادی کے تعداد کو کسی خاص سال شروع مین ع تعبیر کرتا ہی تو اخر سال مین ابادی $ع + \frac{ع}{۴۵} - \frac{ع}{۶۰}$ یعنی $\frac{۱۸۱}{۱۸۰}$ ع سے تعبیر ہوگی اور اسی طرح سی دوسرے سال کے اخر مین وہ $\frac{۱۸۱}{۱۸۰} \times \frac{۱۸۱}{۱۸۰}$ ع یعنی $\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{۲}$ ع سی تعبیر ہوگی غرض لا سال کے اخر مین

$\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا}$ ع سے تعبیر ہوگی ـ فرض کرو کہ لا سال کے اخر مین ابادی دو چند ہوگی تو

$\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا} ع = ۲ ع$ اسواسطے $\left(\frac{۱۸۱}{۱۸۰}\right)^{لا} = ۲$ اسواسطے لا لوگ $\frac{۱۸۱}{۱۸۰} =$ لوگ ۲

اسواسطے $لا = \frac{لوگ ۲}{لوگ ۱۸۱ - لوگ ۱۸۰} = \frac{۰۳۰۱۰۳۰}{۰۰۰۲۴۰۶}$ ک

اونتالیسوان باب

(۱) مساوات (۱) دفعہ ۵۴۵ مین $لا^{۲} - ۱$ بجای م اور $لا^{۲}$ بجای ن کے رکھو تو ہم کو نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا

$\frac{1}{لوگ_{ی} ۱۰}$ مین ضرب دو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$لوگ_{ب}(لا+۱) = ۲ لوگ_{ب} لا - لوگ_{ب}(لا-۱) - \frac{۲}{لوگ_{ی} ۱۰}\left[\frac{۱}{۲ لا^{۲} - ۱} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲ لا^{۲} - ۱}\right)^{۳} + \cdots\right]$

بجای لا کے ۱۰ رکھو تو $لوگ_{ب} ۱۱ = ۲ - ۲ لوگ_{ب} ۳ - \frac{۲}{لوگ_{ی} ۱۰}\left[\frac{۱}{۱۹۹} + \frac{۱}{۳(۱۹۹)^{۳}} + \cdots\right]$

(۴) $س + ص = -\frac{ب}{ا}$ اور $س ص = \frac{ح}{ا}$ بموجب دفعہ ۳۳۶ کے

پس $ا - ب لا + ح لا^{۲} = ا\left[۱ + (س + ص) لا + س ص لا^{۲}\right] = ا(۱ + س لا)(۱ + ص لا)$

اسواسطے لوگ $(ا - ب لا + ح لا^{۲}) =$ لوگ ا + لوگ $(۱ + س لا)$ + لوگ $(۱ + ص لا)$

پس لوگ $(۱ + س لا)$ اور لوگ $(۱ + ص لا)$ موافق دفعہ ۵۴۴ پھیلاؤ

(۷) لوگ$_{ی}\left[(۱+لا)^{\frac{۱+لا}{۲}}(۱-لا)^{\frac{۱-لا}{۲}}\right] = \frac{۱+لا}{۲}$ لوگ$_{ی}(۱+لا) + \frac{۱-لا}{۲}$ لوگ$_{ی}(۱-لا)$

پس لوک ی (۱ + لا) اور لوک ی (۱ − لا) کو پھیلاؤ

(۸) $\frac{۵۰۱}{۴۹۹} = \frac{۱ + \frac{۱}{۵۰۰}}{۱ - \frac{۱}{۵۰۰}} = \frac{۱ + ۰۰۲ء}{۱ - ۰۰۲ء}$ اسواسطے

لوگ ی $\frac{۵۰۱}{۴۹۹} = ۲\left[۰۰۲ء + \frac{(۰۰۲ء)^۳}{۳} + \frac{(۰۰۲ء)^۵}{۵} + \dots\right]$

اب $\frac{(۰۰۲ء)^۳}{۳}$ میں اول ۸ مرتبوں میں صفر ہیں پس اگر ۰۰۲ء پر ٹھہر جائیں تو نتیجہ ۸ مرتبہ تک نکلیگا اور $\frac{(۰۰۲ء)^۵}{۵}$ میں اول چودہ مرتبہ میں صفر ہیں پس اگر ہم $\frac{(۰۰۲ء)^۳}{۳}$ پر ٹھہر جائیں تو تیرہ مرتبے نتیجہ میں نکلینگے اور علے ہذا القیاس

(۹) جب ن نہایت بڑا ہو تو $\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن} \div ی^{لا}$ یعنے $\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن} ی^{-لا}$ کے واسطے صورت متصلہ ہوار لا میں درحقیقت دریافت کرنی ہے اب

لوگ $\left[\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن} ی^{-لا}\right] =$ ن لوک $\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right) - لا = -\frac{لا^۲}{۲ن} + \frac{لا^۳}{۳ن^۲} - \dots$

اسواسطے $\left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن} ی^{-لا} = ی^{-\frac{لا^۲}{۲ن} + \frac{لا^۳}{۳ن^۲} \dots} = ۱ - \frac{لا^۲}{۲ن} + \frac{لا^۳}{۳ن^۲} + \frac{لا^۴}{۸ن^۲} + \dots$

یہاں وہ رقمیں جنمیں $\frac{۱}{ن^۳}$ کر قوار اعلی درجے کی شامل ہیں نہیں بیان کی گئی اسلئے کہ جب ن نہایت بڑا ہو تو وہ بہت چھوٹی ہونگے

(۱۰) $(ا + ب لا + ح لا^۲) ی^{-لا}$ میں $لا^{ن}$ کا سر دریافت کرنا چاہتے ہیں اب

$ی^{-لا} = ۱ - لا + \frac{لا^۲}{۲!} - \dots + \frac{(-۱)^{ن} لا^{ن}}{ن!} \dots$ پس

سر $= ا\frac{(-۱)^{ن}}{ن!} + ب\frac{(-۱)^{ن-۱}}{(ن-۱)!} + ح\frac{(-۱)^{ن-۲}}{(ن-۲)!}$

$= \frac{(-۱)^{ن}}{(ن-۲)!}\left[\frac{ا}{ن(ن-۱)} - \frac{ب}{ن-۱} + ح\right]$

(۱۱) لوک ی (۱ + لا) میں بجای لا کے ۱ رکھو تو

لوک ی ۲ $= ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \dots$

ارقام کے مرکب کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لوک ی ۲ $= ۱ - \frac{۱}{۳ \times ۲} - \frac{۱}{۵ \times ۴} - \frac{۱}{۷ \times ۶} - \dots$

ہاسے معلوم ہوا کہ جمع کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{ی}^{۲} + ۲\text{ک} = ۱ + \frac{۲}{۱\times۲\times۳} + \frac{۲}{۳\times۴\times۵} + \frac{۲}{۵\times۶\times۷} + \dots$

(۱۲) دفعہ ۵۴۹ مین (۱) کی داہنی طرف ہم کو وہ رقم دریافت کرنی چاہیے جسمین $\text{لا}^{\text{ن}+۲}$ شامل ہو

اب $\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳!} + \dots\right)^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۳!} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۴!} + \dots\right)^{\text{ن}}$

$= \text{لا}^{\text{ن}}\left[۱ + \text{ن ی} + \frac{\text{ن(ن}-۱)}{۲}\text{ی}^{۲} + \dots\right]$

اسمین ی بجائے $\frac{\text{لا}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۳!} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۴!} + \dots$ لا کے رکھو

پس رقم جسمین $\text{لا}^{\text{ن}+۲}$ شامل ہے $\frac{\text{ن}}{۳!} + \frac{\text{ن(ن}-۱)}{۲}\left(\frac{۱}{۲!}\right)^{۲} = \frac{\text{ن}}{۶} + \frac{\text{ن(ن}-۱)}{۸}$

اس سے معلوم ہوا کہ نتیجہ مطلوب اوسیطرح حاصل ہوا جسطرح اور نتائج دفعہ ۵۴۹ مین حاصل ہوئی ہین

چالیسوان باب

(۲) (ر + ۱) وین رقم کی نسبت روین رقم سے $= \frac{\text{ر}^{۲} + ۳}{\text{ر}^{۲} + ۱} \cdot \frac{\text{ر}^{۲} + ۱}{(\text{ر} + ۱)^{۲} + ۱}$ لا

دونو اجزاء ضربی $\frac{\text{ر}^{۲} + ۳}{\text{ر}^{۲} + ۱}$ اور $\frac{\text{ر}^{۲} + ۱}{(\text{ر} + ۱)^{۲} + ۱}$ متواتر ر کے زیادہ ہونے سے قریب واحد ہو جاتے ہین اس سبب سے بموجب دفعہ ۵۵۹ اور ۵۶۰ کے اگر لا باعتبار کمیت کے بڑا واحد سے ہے تو سلسلہ انفراجی ہے اور اگر باعتبار کمیت کے واحد سے کم ہے تو انضمامی ہے

(۸) اگر ع بڑا بہ نسبت واحد کے ہے تو سلسلہ انضمامی ہے کیونکہ وہ سلسلہ دفعہ ۵۶۲ سے ظاہر ہوتا ہے اور اگر ع برابر ایک کے ہے تو سلسلہ انفراجی ہے اسلئے کہ سلسلہ

$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} + \dots$ بڑا بہ نسبت $\frac{۱}{۲}\left[۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots\right]$ کے

ہے ایک ایک رقم کے مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے یعنی سلسلہ بڑا بہ نسبت نصف اوس سلسلہ کے ہے جسکے انفراجی ہونے کو ہم جانتے ہین - اگر ع واحد سے کم ہے یا منفی ہے تو سلسلہ انفراجی ہے کیونکہ ہر یک رقم اپنے نظیر کے رقم سے اوس سلسلہ مین جسمین ع = ۱ کے تہا بڑی ہے

(۹) (ر+۱) وین رقم کی نسبت روین رقم سے $= \left(\frac{\text{ر ب} + ۱}{\text{ر ب} + \text{ب} + ۱}\right)^{\text{ع}}$ لا جزء ضربی $\left(\frac{\text{ر ب} + ۱}{\text{ر ب} + \text{ب} + ۱}\right)^{\text{ع}}$ متواتر ر کے زیادہ ہونے سے قریب واحد کے ہوتا ہے تو

اور اگر لا باعتبار کمیت کے واحد سے بڑا ہے تو سلسلہ انفراجی اور اگر کم ہے تو انضمامی بحکم دفعات ۵۵۹ اور ۵۰۶۰ اگر لا = ۱ تو سلسلہ

= ۱/ع [۱/(ح+۱)ع + ۱/(ح+۲)ع + ۱/(ح+۳)ع + ۰۰] جہاں ح بجای لا کے ہے

اب اس سلسلہ کے انضمامی اور انفراجی ہونے کی وہی صورتیں ہیں جو دفعہ ۵۶۲ کے سلسلہ کی ہیں مثلاً اگر ح = ۴ اب اگر اول چار رقموں کو اٹھا ڈالو تو سلسلہ معینہ وہی ہے جو دفعہ ۵۶۲ میں ہے۔ اگر ۴ اور ۵ کے درمیان ح واقع ہوتا ہے

تو یہہ سلسلہ دفعہ ۵۶۲ کے سلسلہ سے اگر اوسکی چار رقمیں اٹھا ڈالیں چھوٹا ہوگا اور اگر اوسکی پانچ رقمیں اٹھا ڈالیں تو بڑا ہوگا

(۱۱) س۲ + س۳ > ۲ س۳ اور س۴ + س۵ + س۶ + س۷ > ۴ س۷

س۸ + س۹ + ۰۰۰ + س۱۵ > ۸ س۱۵ اور علے ہذا القیاس اسے معلوم ہوتا ہے کہ اول سلسلہ بڑا ہے بہ نسبت نصف دوسرے سلسلہ کے ہیں پس اگر دوسرا انفراجی ہے تو پہلا بھی انفراجی ہے

س۲ + س۳ < ۲ س۱ اور س۴ + س۵ + س۶ + س۷ < ۴ س۴ اور

س۸ + س۹ + ۰۰۰ + س۱۵ < ۸ س۸ اور علے ہذا القیاس اسے معلوم ہوتا ہے کہ پہلا سلسلہ بہ نسبت دوسرے سلسلہ کے کم ہے پس اگر دوسرا سلسلہ انضمامی ہے تو پہلا سلسلہ بھی انضمامی ہے

(۱۲) سلسلہ = ۱ + ۱−۲/۲ن + ۱−۳/۳ن + ۱−۴/۴ن + ۰۰

= ۱ + ۱/(۱−۲ن) + ۱/(۱−۳ن) + ۰۰۰ − [۱/۲ن + ۱/۳ن + ۱/۴ن + ۰۰]

اگر ن بڑا ۲ سے ہے تو دو سلسلوں میں سے ہر ایک انضمامی ہے اور اصلی سلسلہ مفروض بھی انضمامی ہے اگر ن = ۲ تو اول سلسلہ انفراجی ہے اور دوسرا انضمامی ہے پس اس سبب سے سلسلہ مفروض انفراجی ہے اگر ن چھوٹا ۲ سے ہے تو سلسلہ مفروض کے ہر ایک رقم بہ نسبت اوسی صورت کی جسمیں ن = ۲ ہے بڑی ہے اسی سے معلوم ہوا کہ سلسلہ مفروض انفراجی ہے

اکتالیسواں باب

(۱) فرض کرو کہ جمع واجب الادا م ہے اور ب بٹا ہے تو ب = $\frac{\text{م ن ر}}{\text{۱ + ن ر}}$ اور
فرض کرو کہ س سود اس جمع پر ہے تو س = م ن ر اور م اور س کے درمیان
نصف اوسط موسیقیہ = $\frac{\text{۲ م × س}}{\text{م + س}} = \frac{\text{۲ م}^{۲}\text{ ن ر}}{\text{م + م ن ر}} = \frac{\text{۲ م ن ر}}{\text{۱ + ن ر}}$

(۲) م ن ر = ۱۸۰ اور $\frac{\text{م ن ر}}{\text{۱ + ن ر}}$ = ۱۵۰ اسواسطے $\frac{\text{۱۸۰}}{\text{۱ + ن ر}}$ = ۱۵۰
اسواسطے $\frac{\text{۱۸}}{\text{۱۵}}$ = ۱ + ن ر، اسواسطے ن ر = $\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$ اسواسطے م = ۱۸۰ × ۵ = ۹۰۰

(۳) فرض کرو کہ شرح سود ر ہے تو ط = $\frac{\text{ص ر}}{\text{۱ + ر}}$ اسواسطے ر = $\frac{\text{ص − ط}}{\text{ط}}$

(۴) فرض کرو شرح سود ر ہے تو ۱ + ۴۰ ر = ۲ اسواسطے ر = $\frac{\text{۱}}{\text{۴۰}}$

(۵) فرض کرو کہ چھ مہینے کی مدت پر جو جنس بیچی جائے اوسکی قیمت م ہے اور ع قیمت نقد اوس جنس کی
تو بموجب دفعہ ۷۷۵ کے $\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱ + ن ر}}$ لیکن ر = $\frac{\text{۵}}{\text{۱۰۰}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲۰}}$ اور ن = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$
اسواسطے $\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱ + }\frac{۱}{۴۰}} = \frac{\text{۴۰}}{\text{۴۱}}$

(۶) فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے تو بموجب دفعہ ۷۷۵ کے
۲۰۵۰ = ۱۰۰ $(\text{۱ + }\frac{۵}{۱۰۰})^{\text{ن}}$ اسواسطے $(\frac{\text{۱۰۵}}{\text{۱۰۰}})^{\text{ن}} = \frac{\text{۲۰۵}}{\text{۱۰}}$
اسواسطے $(\frac{\text{۲۱۰}}{\text{۲۰۰}})^{\text{ن}} = \frac{\text{۲۱۰}}{\text{۲۰}}$ اسواسطے ن لوگ $\frac{\text{۲۱۰}}{\text{۲۰۰}}$ = لوگ $\frac{\text{۲۱۰}}{\text{۲۰}}$
اسواسطے ن = $\frac{\text{لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲۰}}{\text{لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲۰۰}} = \frac{\text{لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲ − ۱}}{\text{لوگ ۲۱۰ − لوگ ۲ − ۲}}$
اب لوگ ۲۱۰ = لوگ ۱۴ + لوگ ۱۵ اور لوگ ۲ = لوگ $(۱۶)^{\frac{۱}{۴}}$ =
$\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ لوگ ۱۶ پس ن = $\frac{\text{۱۰۰۲۱۱۹}}{\text{۰۰۲۱۱۹}}$

(۷) فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے اسواسطے بموجب دفعہ ۷۷۵ کے
ع $(\text{۱ + }\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۱۰۰})^{\text{ن}}$ = ۳ ع اسواسطے $(\text{۱٫۰۳۵})^{\text{ن}}$ = ۳
اسواسطے ن لوگ ۱٫۰۳۵ = لوگ ۳ اسواسطے ن = $\frac{\text{لوگ ۳}}{\text{لوگ ۱٫۰۳۵}} = \frac{\text{۰٫۴۷۷۱۲}}{\text{۰٫۰۱۴۹۴}}$

(۸) بموجب دفعہ ۷۷۵ کے طریقہ کتاب کے ع ع = ع ن م اور ق ع = ع ن ر

اسواسطے ع = اَ اور ن = اَن اسواسطے ع ن/م = ق ن/م کیونکہ ہریک = ۱
اسواسطے ع ن/م = ق اسواسطے لوگ ع ق = ن/م

بیالیسوان باب سوالات متفرقہ

(۱) دفعہ ۵۸۰ کے طریقہ کتابت کے موافق ع۱ = ۴۰۰ اور ع۲ = ۲۱۰۰ اور د۱ = ۲ اور د۲ = ۸ اور ر = ۵/۱۰۰ اسی یہہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ ۲۱۰۰ (۸ − لا) / (۱ + (۸ − لا)/۲۰) = ۴۰۰ (لا − ۲)

اسواسطے ۲۱۰۰ (۸ − لا) = ۴۰۰ (لا − ۲) + ۲۰ (۸ − لا) (لا − ۲)

(۲) دفعہ ۵۸۰ کے طریقہ کتابت کے موافق ع۱ = ۱۲۰ اور ع۲ = ۱۴ ۱/۴ اور د۱ = ۰ اور د۲ = ۲۷۰ وقت کو دنون مین بیان کیا ہے اور ر = ۲/(۱۹۲×۱۰۰) = ۱/۹۶۰۰ اسلیے
۱۴ ۱/۴ (۲۷۰ − لا) / (۱ + (۲۷۰ − لا)/۹۶۰۰) = ۱۲۰ لا اسواسطے ۶۵/۴ (۲۷۰ − لا) = ۱۲۰ لا + لا (۲۷۰ − لا)/۴۸۰

(۳) بموجب دفعات ۵۷۴ اور ۵۷۷ بشاعم پر حسب ہر روپیہ قیمت و حساب الحال واجب ع۲ − لا سال مین ع۲ [۱ − ی − ر (د۲ − لا)] ہی اور ع۱ کا سود لا − د۱ سال مین ع۱ [ی ر (لا − د۱) − ۱] ہے
پس ان دونو جملون کو برابر لکہہ دین

(۴) فرض کرو کہ لا اور د اور ی ان تین حصون کے روپیون کو تعبیر کرتے ہین تو لا اَط = د اَص = ی اَس ان مساواتون کو اس طرح سے بہی لکہہ سکتے ہین کہ لا/اَط = د/اَص = ی/اَس اور بموجب دفعہ ۳۸۴ کے ہر یک کسر ان مساواتون مین سے (لا + د + ی)/(اَط + اَص + اَس) کی برابر ہے لیکن لا + د + ی برابری جن کے معلوم تو اسسے ہم کو لا اور د اور ی معلوم ہوجاینگے

(۵) دفعہ ۵۲۶ کے طرح فرض کرو کہ (اَ + √(اَ۲ − ۱))ن کا صحیح حصہ ص ہی اور ص + ک اوسکی پوری قیمت ہے اور ک ایک کسر واجب ہے تو
ص + ک = اَن + ن اَن−۱ √(اَ۲ − ۱) + ن (ن − ۱)/۲ اَن−۲ (اَ۲ − ۱) + . . .
اور اَ − √(اَ۲ − ۱) ایک کسر واجب ہے اسواسطے (اَ − √(اَ۲ − ۱))ن کسر واجب ہے
اسکو کَ سے تعبیر کرو تو

$ک' = ا^{ن} - ن ا^{ن-۱} \sqrt{ا^۲ - ۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ا^{ن-۲} (ا^۲ - ۱) - \ldots$

پس جمع کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ص + ک + ک' = ایک جفت صحیح عدد کے اسواسطے ک + ک' = ۱ اور ص = ایک طاق عدد کے

(۹) موافق مثال گذشتہ

$ص + ک = \left[\sqrt{ا^۲+۱} + ا\right]^{ن} = (ا^۲+۱)^{\frac{ن}{۲}} + ن(ا^۲+۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} ا + \frac{ن(ن-۱)}{۲} (ا^۲+۱)^{\frac{ن-۲}{۲}} ا^۲ + \ldots$

$ک' = \left[\sqrt{ا^۲+۱} - ا\right]^{ن} = (ا^۲+۱)^{\frac{ن}{۲}} - ن(ا^۲+۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} ا + \frac{ن(ن-۱)}{۲} (ا^۲+۱)^{\frac{ن-۲}{۲}} ا^۲ - \ldots$

اگر ن جفت ہو اور ہم ان دونو حاصل کو موافق مثال ہشتم جمع کریں تو اوسی کے مشابہ ایک نتیجہ نکلیگا اور اگر ن طاق ہو تو دوسرے حاصل کو اول حاصل سے تفریق کریں تو ص + ک − ک' = ایک جفت صحیح عدد کے اسسے معلوم ہوا کہ ک − ک' = ۰ اور ص = ایک جفت عدد کے

(۷) $\left(\frac{ا}{ا+لا}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۱+\frac{لا}{ا}}\right)^۲ = \left(۱ + \frac{لا}{ا}\right)^{-۲} = ۱ - ۲\frac{لا}{ا} + ۳\left(\frac{لا}{ا}\right)^۲ - \ldots$

پس ہم کو $۱ - ۲\left(\frac{لا}{ا}\right) + ۳\left(\frac{لا}{ا}\right)^۲ + \ldots + (ن+۱)(-۱)^{ن}\left(\frac{لا}{ا}\right)^{ن}$ کے مجموعہ کو $\left(\frac{ا}{ا+لا}\right)^۲$ مین سے تفریق کرنا چاہیے تو باقی مطلوب حاصل ہوگی

دفعہ ۲۷۴ مین ا کے جگہہ ۱ اور ب کے جگہہ $-\frac{لا}{ا}$ رکھو تو مجموعہ یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{۱-ن\left(-\frac{لا}{ا}\right)^{ن}}{۱+\frac{لا}{ا}} - \frac{\frac{لا}{ا}\left[۱-\left(-\frac{لا}{ا}\right)^{ن-۱}\right]}{\left(۱+\frac{لا}{ا}\right)^۲} \text{ یعنی } \frac{۱-(ن+۱)\left(-\frac{لا}{ا}\right)^{ن} - ن\frac{لا}{ا}\left(-\frac{لا}{ا}\right)^{ن}}{\left(۱+\frac{لا}{ا}\right)^۲}$$

اسکو $\frac{۱}{\left(۱+\frac{لا}{ا}\right)^۲}$ سے تفریق کرو تو باقی $= \left(-\frac{لا}{ا}\right)^{ن} \frac{ن+۱+ن\frac{لا}{ا}}{\left(۱+\frac{لا}{ا}\right)^۲}$

(۱۰) یہہ کا کل سر یہہ ہوگا کہ

$۱ - ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} + \ldots$ یعنی $(۱-۱)^{ن}$ یعنی صفر ہوگا

اور صہ کا کل سر

$-ن\left[۱ - (ن-۱) + \frac{(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۲} - \ldots\right]$ یعنی $-ن(۱-۱)^{ن-۱}$ یعنی صفر

(۱۱) $ص = ا\frac{(۱+لا)^{ن}-۱}{۱+لا-۱}$ اسواسطے $(۱+لا)^{ن} = ۱ + \frac{ص لا}{ا}$ طرفین مساوات کی لوکارثم لو

اسواسطے لا سی ن = ۱

(۱۱) سول بیاج ا روپیہ کا ا سال مین = ی ر اسواسطے ایک روپیہ کا ا برس مین = ی - ۱ = $\frac{۱}{م}$ بموجب فرض کے اسواسطے ی = $\frac{۱+م}{م}$ اور ع روپیہ کا ن برسون مین سول بیاج = ع $ی^{ن}$ = ع $\left(\frac{۱+م}{م}\right)^{ن}$

(۱۲) فرضکرو کہ ع روپیہ قرض لیا تو ایک سال کے اخر مین قرض ع + ع ر ہو گیا اسمین سے ع ر ادا کیا گیا تو تو ع - ع ر قرض باقی رہا یعنی (۱-ر) ع اسی طرح سے ہم دوسرے سال کے اخر مین دریافت کرسکتے ہین کہ ع (۱-ر)(۱-ر) باقی رہا یعنی ع $(۱-ر)^{۲}$ اور تیسرے سال کے اخر مین ع $(۱-ر)^{۳}$ باقی بچا اور علے ہذا القیاس

(۱۳) بموجب دفعہ ۵۹۸ کے ہم کو ۱۰ روپیہ زرسالیانہ کی قیمت دریافت کرنی ہے جو تیرہوین سال شروع ہوتا ہے اور ۷ برس تک جاری رہتا ہے اور بموجب دفعہ ۵۹۷ کے وہ یہہ ہے کہ
$\frac{۱}{ط-۱}(ط^{-۱۳} - ط^{-۲۰})$ جسمین ط = $\frac{۱۰۶}{۱۰۰}$ = ۱،۰۶ اب لوگ $ط^{-۱۳}$ = -۱۳ لوگ ۱،۰۶
= -۰،۳۲۸۹۷۶۷ = ۱-۰،۶۷۱۰۲۳۳ اسواسطے $ط^{-۱۳}$ = ۰،۴۶۸۸۳۸۵
لوگ $ط^{-۲۰}$ = -۲۰ لوگ ۱،۰۶ = -۰،۵۰۶۱۱۸۰ = ۱-۰،۴۹۳۸۸۲۰
اسواسطے $ط^{-۲۰}$ = ۰،۳۱۱۸۰۴۲ پس زر تجدید شدہ = ۱۰ ÷ $\frac{۱}{۱۰۰}$ (۰،۴۶۸۸۳۸۵ - ۰،۳۱۱۸۰۴۲)

(۱۴) ب زرسالیانہ کی قیمت حال $\frac{ب(۱-ط^{-ن})}{ط-۱}$ ہی پس ظاہر ہی کہ اگر یہہ رقم بڑی ا سے تو وہ شخص تباہ ہوجائیگا یعنی اگر ب $(۱-ط^{-ن})$ بڑا ا (ط-۱) سے ہو اس صورت مین ب = ۹۰ ط = $\frac{۱۰۵}{۱۰۰}$ اور ا = ۱۰۰۰ پس وہ آدمی تباہ اوس صورت مین ہوجائیگا کہ ۹۰ $(۱-ط^{-ن})$ بڑا بہ نسبت ۵۰ کے ہو یعنی اگر $۱-ط^{-ن}$ بڑا بہ نسبت $\frac{۵}{۹}$ کے ہو یعنی اگر $ط^{-ن}$ چھوٹی $\frac{۴}{۹}$ سے ہو پس اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $\frac{۱}{ط^{ن}}$ چھوٹا بہ نسبت ا ÷ $\frac{۹}{۴}$ کے ہو یعنی $ط^{ن}$ بڑی بہ نسبت $\frac{۹}{۴}$ کے ہو جب ن = ۱۷ تو لوگ $ط^{۱۷}$ = ۱۷ لوگ ط = ۱۷ لوگ $\frac{۲۱}{۲۰}$ = ۱۷ لوگ ۲۱ - لوگ ۲۰)
= ۱۷ (لوگ ۷ + لوگ ۳ - ۱ - لوگ ۲) اور لوگ $\frac{۹}{۴}$ = لوگ ۹ - لوگ ۴ = ۲ لوگ ۳ - ۲ لوگ ۲
معلوم ہوتا ہے کہ پہلے لوگارثم بڑی بہ نسبت دوسرے کے ہے

چوالیسوان باب

(۷) بموجب دفعہ ۴۰۵ کے $ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1 = \pm 1$ اور $ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2 = \mp 1$
اسواسطے $ع_1 ق_3 - ع_3 ق_1 = -(ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2)$ اسواسطے $(ع_3 - ع_1) ق_2 = (ق_3 - ق_1) ع_2$

(۸) فرضکرو کہ $\frac{ع_1}{ق_1}$ اور $\frac{ع_2}{ق_2}$ دو متقرب متصلہ ہون تو $ق_1$ اور $ق_2$ کا کوئی دو مشترک بڑا واحد سے نہین ہو سکتا اسواسطے کہ $ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1 = \pm 1$ اب جب کوئی عدد واحد سے بڑا دونو $ق_1$ اور $ق_2$ کو تقسیم کریگا تو ضرور ہی کہ وہ ± 1 کو بھی پورا تقسیم کری اور یہہ باطل - علی ہذا القیاس $ع_1$ اور $ع_2$ کو کوئی عدد واحد سے بڑا تقسیم نہین کر سکتا

(۹) $ع_1 ق_0 - ع_0 ق_1 = -1$ اسواسطے کہ اول متقرب نہایت چھوٹا ہی اور اسیواسطے دوسرے متقرب سے چھوٹا ہی پس $ع_2 ق_1 - ع_1 ق_2 = -(ع_1 ق_2 - ع_2 ق_1) = (-1)^2$
پس $ع_3 ق_2 - ع_2 ق_3 = -(ع_2 ق_3 - ع_3 ق_2) = (-1)^3$ اور علی ہذا القیاس

(۱۰) $\frac{ع_2}{ق_2} - \frac{ع_1}{ق_1} = \frac{1}{ق_1 ق_2}$ اور $\frac{ع_3}{ق_3} - \frac{ع_2}{ق_2} = -\frac{1}{ق_2 ق_3} \ldots \frac{ع_ن}{ق_ن} - \frac{ع_{ن-1}}{ق_{ن-1}} = \frac{(-1)^{ن}}{ق_{ن-1} ق_ن}$
ان سب نتائج کو جمع کرو

(۱۱) ساتوین مثال کے موافق

$$(ع_{ن+1} - ع_{ن-1}) ق_ن = (ق_{ن+1} - ق_{ن-1}) ع_ن$$

$$(ع_{ن+2} - ع_ن) ق_{ن+1} = (ق_{ن+2} - ق_ن) ع_{ن+1}$$ اسواسطے

$$(ع_{ن+1} - ع_{ن-1})(ع_{ن+2} - ع_ن) ق_ن ق_{ن+1} = (ق_{ن+1} - ق_{ن-1})(ق_{ن+2} - ق_ن) ع_ن ع_{ن+1}$$

$ع_ن ع_{ن+1} ق_ن ق_{ن+1}$ پر تقسیم کرو

(۱۲) ہم کو معلوم ہی کہ $\frac{ع_ن}{ق_ن} = \frac{ع_{ن-1} س_ن + ع_{ن-2}}{ق_{ن-1} س_ن + ق_{ن-2}}$ اسواسطے

$$ع_ن ق_{ن-2} - ع_{ن-2} ق_ن = س_ن (ع_{ن-1} ق_{ن-2} - ع_{ن-2} ق_{ن-1}) = -س_ن (-1)^{ن}$$

$= (-1)^{ن-1} س_ن$ بموجب مثال ۹

(۱۳) فرض کرو کہ $ع_ن = س_ن ع_{ن-۱} + ص_ن ع_{ن-۲}$ اور $ق_ن = س_ن ق_{ن-۱} + ص_ن ق_{ن-۲}$

دوسرا متقرب $\frac{ع_ن}{ق_ن}$ اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ $س_ن$ کو $س_ن + \frac{ص_{ن+۱}}{س_{ن+۱}}$ سے تبدیل کریں

تو وہ متقرب $= \frac{\left(س_ن + \frac{ص_{ن+۱}}{س_{ن+۱}}\right) ع_{ن-۱} + ص_ن ع_{ن-۲}}{\left(س_ن + \frac{ص_{ن+۱}}{س_{ن+۱}}\right) ق_{ن-۱} + ص_ن ق_{ن-۲}}$

$= \frac{س_{ن+۱} ع_ن + ص_{ن+۱} ع_{ن-۱}}{س_{ن+۱} ق_ن + ص_{ن+۱} ق_{ن-۱}}$

اسواسطے اگر ہم یہہ فرض کریں کہ $ع_{ن+۱} = س_{ن+۱} ع_ن + ص_{ن+۱} ع_{ن-۱}$ اور $ق_{ن+۱} = س_{ن+۱} ق_ن + ص_{ن+۱} ق_{ن-۱}$ تو متقرب مابعد $\frac{ع_ن}{ق_ن}$ کا $\frac{ع_{ن+۱}}{ق_{ن+۱}}$ ہوگا پس اسی ثابت ہوا کہ متقرب $\frac{ع_{ن+۱}}{ق_{ن+۱}}$ اوسی قاعدہ کے موافق بن سکتا ہے جس قاعدہ سے $\frac{ع_ن}{ق_ن}$ بنا تھا امتحان سے معلوم ہوتا ہے کہ قاعدہ تیسرے متقرب کے حالت مین درست ہے اسواسطے وہ ہر متقرب مابعد کے لئے صحیح ہے

اب چونکہ $ع_ن = س_ن ع_{ن-۱} + ص_ن ع_{ن-۲}$ اور $ق_ن = س_ن ق_{ن-۱} + ص_ن ق_{ن-۲}$
اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $ع_ن ق_{ن-۱} - ع_{ن-۱} ق_ن = ص_ن (ع_{ن-۲} ق_{ن-۱} - ع_{ن-۱} ق_{ن-۲})$
$= - ص_ن (ع_{ن-۱} ق_{ن-۲} - ع_{ن-۲} ق_{ن-۱})$ پس نفس الامر مین عمل کرنیسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$ع_۲ ق_۱ - ع_۱ ق_۲ = - ص_۱ ص_۲$

اسواسطے $ع_۳ ق_۲ - ع_۲ ق_۳ = - ص_۳ (ع_۲ ق_۱ - ع_۱ ق_۲) = (-۱)^۲ ص_۱ ص_۲ ص_۳$ اور علی ہذا القیاس

(۱۴) یہہ استقرا سے ثابت ہوسکتا ہے فرض کرو کہ $ص = ع_ن ب_{ن-۱} + ع_{ن-۱} ب_ن$
اب اگر $ب_{ن-۱}$ تقسیم $س_ن$ پر کیا جائے تو خارج قسمت (ن+۱) وان کسر مسلسل کا ہوگا پس
$ب_{ن-۱} = س_{ن+۱} ب_ن + ب_{ن+۱}$ جسمین $س_{ن+۱}$ اس خارج قسمت کو تعبیر کریگا اسے ہم کو یہہ حاصل ہوگا

$ص = ع_ن (ب_ن س_{ن+۱} + ب_{ن+۱}) + ع_{ن-۱} ب_ن = (ع_ن س_{ن+۱} + ع_{ن-۱}) ب_ن + ع_ن ب_{ن+۱}$

= ع ن ب ن + ع ن ب ن+۱ پس اب معلوم ہوا کہ ن کی خاص قیمت کیواسطے جو نتیجہ نکلتا ہی اوسی طرح کا نتیجہ اوسکی قیمت پر ایک بڑہانے سے نکلتا ہی - اور یہہ قاعدہ اوس صورت مین ثابت ہو سکتا ہی کہ ن = ۲ اسلئی کہ اگر ہم صہ/ سہ پر دفعہ ۱۰۶ کے طور پر عمل کرین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

صہ/سہ = ا + ۱/ سہ اور سہ = ب + ب/ ۲ پس

صہ = ا سہ + س = (ب + ب/ ۲) ا + س = (ا ب + ۱) س ۲ + ا س ۲

اور یہی ثابت کرنا تہا - اور اسی طرح سے مہ = ق ن س ن-۱ + ق ن-۱ س ن ثابت ہو سکتا ہی یہان س ۲ و س ۲ وغیرہ باقیون کو تعبیر کرتا ہے

(۱۵) صہ/مہ - ع ن/ق ن = (صہ ق ن - ع ن مہ)/(مہ ق ن) = ±(ق ن ع ن-۱ - ق ن-۱ ع ن) س ن/(مہ ق ن) بموجب مثال ۱۴

پس ق ن ع ن-۱ - ق ن-۱ ع ن = ±۱ پس نتیجہ مطلوب حاصل ہوا

(۱۶) اگر ب ن اور س ن-۱ کوئی وفق مشترک واحد سی بڑا رکہین تو وہ دونو صہ اور مہ کو اوس دلیل کے موافق جو مثال چہاردہم مین بیان ہوئی تقسیم کریگا اور یہہ نا ممکن ہے اسلئی کہ بموجب فرض صہ اور مہ کوئی وفق مشترک واحد سی بڑا نہین رکہہ سکتی

پینتالیسوان باب

(۱۵) خارج قسمت ۳ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۶ و ۱ و ۱ و ۱ و ۶ . . . . .

(۱۶) خارج قسمت ۵ و ۱ و ۳ و ۵ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱۰ و ۱ و ۱ و ۳ و ۵ و ۳ و ۱ و ۱ و ۱۰

(۱۷) خارج قسمت ۵ و ۲ و ۱ و ۱۰ و ۱ و ۲ و ۱۰ . . . نوان متقرب ۱۱۳۵/۱۹۷ غلطی بموجب دفعہ ۴۰۸ کے چہوٹی بموجب $\frac{1}{(197)^2}$ کے ہے اور یہہ کم ۰۰۰۰۱ . سی ہے

(۱۸) خارج قسمت ۴ و ۱ و ۳ و ۱ و ۸ و ۱ و ۳ و ۱ و ۸ . . . اور متقرب مین ۴/۱ و ۵/۱ و ۱۹/۴ و ۲۴/۵ و ۲۱۱/۴۴ و ۲۳۵/۴۹ و ۹۱۶/۱۹۱ و ۱۱۵۱/۲۴۰ و ۱۱۲۴/۲۱۱ مین سے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۰۸ کے غلطی $\frac{1}{49 \times 44}$ اور $\frac{1}{44(49+44)}$ کے درمیان واقع ہے

(۱۹) دفعہ ۴۰۸ کے مثال دیکہو

سب کو شلنگون مین تحویل کرلین تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۲۱لا + ۱۰۰ی = ۱۰۰۰۰ اس مساوات کا حل کلی لا = ۱۰۰ط اور ی = ۱۰۰ - ۲۱ط ہے پس چار طرح سے ادا ہو سکتا ہے اگر لا کے صفر قیمت خارج کرین اور اس قیمت کو داخل کرین تو ۵ طور سے

(۱۲) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکے واسطے فرضکرو کہ گنی کی تعداد لا اور سورن کے تعداد ی ہو تو ۲۱لا + ۵ی = ۱۲۰۰۰ حل کلی لا = ۵ط اور ی = ۲۴۰۰ - ۲۱ط ہے

(۱۳) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرضکرو کہ ہاف گنی کی تعداد کو لا اور ہاف کراون کے تعداد کو ی تعبیر کرتا ہی تو ۲۱لا + ۴۰ی = ۱۴۰۰۰ اسکا حل کلی لا = ۴۰ط اور ی = ۱۰۰ - ۲۱ط

(۱۴) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرض کرو کہ فلورن کی تعداد لا اور ہاف کراون کے تعداد ی ہی تو ۴لا + ۵ی = ۳۹ تو حل کلی اسکا لا = ۱ + ۵ط اور ی = ۷ - ۴ط

(۱۵) کسی ایک طور سے ادا کرنے کی لئے فرضکرو کہ پانچ فرنیک کے سکی لا اور ڈولر کی تعداد ی ہے تو ۸لا + ۷ی = ۸۸۷ اور حل کلی لا = ۵ + ۷ط اور ی = ۱۲۱ - ۸ط

(۱۶) کسی ایک طور سے ادا کرین اوسکی واسطے فرضکرو کہ ۷ شلنگ کے سکون کی تعداد لا اور ۱۷ شلنگ کے سکون کی تعداد ی ہی تو ۷لا + ۱۷ی = ۶۰۰ حل کلی اسکا لا = ۷۶ - ۱۷ط اور ی = ۴ + ۷ط

(۱۷) فرضکرو کہ لا گنی وہ دیتا ہی اور ی ہاف کراون لیتا ہی تو ۴۲لا - ۵ی = ۲۱ تو حل کلی لا = ۳ + ۵ط اور ی = ۲۱ + ۴۲ط

(۱۸) فرضکرو کہ قرض ادا کرنے کیواسطے لا سورن دئے اور ی فرنک لئی تو ۲۰لا - ۲۰/۲۵ی = ۴۴ یعنی ۲۰لا - ۴ی/۵ = ۴۴ اسواسطے ۲۵لا - ی = ۵۵ حل کلی یہہ ہے کہ لا = ۳ + ط اور ی = ۲۰ + ۲۵ط

(۱۹) جو حصہ ۶ پر تقسیم ہوتا ہے اوسمین فرض کرو کہ خارج قسمت لا نکلتا ہی تو یہہ حصہ ۶لا + ۵ ہوا اور جو حصہ ۱۱ پر تقسیم ہوتا ہی اوسمین فرضکرو کہ خارج قسمت ی نکلتا ہی تو یہہ حصہ ۱۱ی + ۴ ہوا

پس ۶ لا + ۵ + ۱۱ ی + ۴ = ۲۰۰ اسواسطے ۶ لا + ۱۱ ی = ۱۹۱ اسکا حل کلی
لا = ۳۰ - ۱۱ ط اور ی = ۱ + ۶ ط ہی اسواسطے ایک حصہ ۱۸۵ - ۶۶ ط اور
دوسرا حصہ ۱۵ + ۶۶ ط ہے

(۲۰) فرض کرو کہ لا کروان اور ی ہاف کروان ہین تو $\frac{۸۱}{۱۰۰}$ لا + $\frac{۲۹۶}{۱۰۰۰}$ ی = ۳۹
اسواسطے ۹۰ لا + ۷۴ ی = ۴۰۰۰ اسواسطے ۴۵ لا + ۳۷ ی = ۲۰۰۰
اسکا حل کلی لا = ۲۸ - ۳۷ ط اور ی = ۲۰ + ۴۵ ط

(۲۱) فرضکرو کہ اول رقم لا اور فرق عام ی ہی تو $\frac{ن}{۲}$ [۲ لا + (ن - ۱) ی] = ن۲
اسواسطے ۲ لا + (ن - ۱) ی = ۲ ن اول ی = ۱ کے فرض کرکے امتحان کرو
لا = $\frac{ن + ۱}{۲}$ یہہ قیمت اوس صورت مین داخل ہوسکتی ہی کہ ن طاق ہو پہر فرض کرو کہ
ی = ۲ تو لا = ۱ اگر ی کو ۲ سے بڑا فرض کرین تو لا منفی ہوگا اور یہہ قیمت مساوات
مین دخل نہین رکہتی

(۲۲) فرضکرو کہ جب عدد ۲۸ پر تقسیم ہو تو خارج قسمت لا ہے
تو عدد ۲۸ لا + ۲۱ ہوگا اور جب عدد ۱۹ پر تقسیم ہو تو
فرض کرو کہ خارج قسمت ی ہی تو ۱۹ ی + ۱۷ عدد ہوگا پس ۲۸ لا + ۲۱ = ۱۹ ی + ۱۷
اسواسطے ۲۸ لا - ۱۹ ی = - ۴ حل کلی اس مساوات کا لا = ۸ + ۱۹ ط اور
ی = ۱۲ + ۲۸ ط اور عدد کے صورت عامہ ۲۸ لا + ۲۱ یعنی ۲۴۵ + ۲۸ × ۱۹ ط
چہوٹے سے چہوٹا عدد ط = ۰ کے فرض کرنے سے حاصل ہوگا

(۲۳) فرض کرو کہ جب عدد ۳ پر تقسیم ہوتا ہے تو خارج قسمت لا ہی اور جب ۵ پر تقسیم ہوتا ہی تو خارج قسمت ی ہے
اور جب ۷ پر تقسیم ہوتا ہی تو خارج قسمت ی ہے تو عدد = ۳ لا + ۲ = ۵ ی + ۴ = ۷ ی + ۲
۳ لا + ۲ = ۵ ی + ۴ اسواسطے ۳ لا - ۵ ی = ۲ تو حل کلی یہہ ہوگا کہ لا = ۴ + ۵ ر
اور ی = ۲ + ۳ ر اب ۳ لا + ۲ = ۷ ی + ۱۶ اب انہین جوڑا کے واسطے جملہ حاصل کیا ہے

اوسے رکھو تو ۵ ار – ۷ ی = –۸ اسکا حل کلی ر = ۲ + ۷ ط اور ی = ۱۵ + ۱۴ ط ہے

اسسے معلوم ہوا کہ ۷ ی + ۴ = ۱۰۵ ط + ۱۰۴

(۲۴) فرضکرو کہ جب عدد ۲۸ و ۱۹ و ۱۵ پر تقسیم ہوتا ہے تو خارج قسمت لا اور ر اور ی نکلتے ہیں

تو عدد = ۲۸ لا + ۱۳ = ۱۹ ر + ۲ = ۱۵ ی + ۷

۲۸ لا + ۱۳ = ۱۹ ر + ۲ کا حل کلی لا = ۳ + ۱۹ ر اور ر = ۵ + ۲۸ ر

اب ۱۹ ر + ۲ = ۱۵ ی + ۷ اسمین وہ جملہ جو ر کے واسطے حاصل ہوا مندرج کرو

تو ۱۹ × ۲۸ ر + ۹۰ = ۱۵ ی اور اسکا حل کلی ر = ۱۵ ط اور ی = ۲۸ × ۱۹ ط + ۶ اسسے معلوم ہوا کہ

۱۵ ی + ۷ = ۹۷ + ۱۵ × ۱۹ × ۲۸ ط یہہ عام صورت عدد مطلوب کی ہے چھوٹا عدد ط = ۰ کے

فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۵) ر کی قیمت ۸ سے بڑی نہیں ہوسکتی اسواسطے کہ ۲۳ × ۹ بڑا بہ نسبت ۲۰۰ کے ہے ر کے

قیمتین متواتر ۱ و ۲ و ۳ . . . . ۸ مقرر کرو اور اسکی مطابق لا اور ی کی قیمتیں دریافت کرو مثلاً

اگر ر = ۱ تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱۷ لا + ۳ ی = ۱۷۷ اور حل کلی یہہ ہوگا کہ لا = ۳ ط اور

ی = ۵۹ – ۱۷ ط صفر قیمت کو خارج کرو تو صرف تین حل اس صورت میں ہونگے

(۲۶) ی کو مساواتوں سے دور کرنیسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ۷ لا + ۳ ر = ۱۹۰ اسکا حل کلی

لا = ۱ + ۳ ط اور ر = ۶۱ – ۷ ط معلوم مساواتوں میں کسی ساوات میں لا اور ر کے قیمتوں کے درج کرنے سے

ی = ۶۳ + ۱۳ ط حاصل ہوگا

(۲۷) کسی طور سے ادا کرنے اوسکی واسطے شلنگ کے تعداد کو لا اور سکسپنسوں کی تعداد کو ر سے تعبیر کرو

تو لا + ر سی تعداد دہاف کرون کی تعبیر ہوگی تو ۵ (لا + ر) + ۲ لا + ر = ۶۰۰ یعنی ۷ لا + ۶ ر = ۶۰۰

اوسکا حل کلی لا = ۶ ط اور ر = ۱۰۰ – ۷ ط

(۲۸) فرضکرو کہ گنی کی تعداد لا اور کرون کے تعداد ر اور شلنگ کے تعداد ی ہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲۱ لا + ۵ ر + ی = ۹۶ اور لا + ر + ی = ۱۶

ی کو مساواتون سے دور کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا = ۴ - ط اور ی = ۵ ط اسواسطے ی = ۱۳ - ۴ ط

(۲۹) کسی طرح سے ادا کرنے کے واسطے فرض کرو کہ اف کرون کے تعداد کو لا تعبیر کرتا ہے اور فلورن کے تعداد ی تعبیر کرتا ہے تو لا + ی کرون کی تعداد کو تعبیر کریگا پس ۲۱ (لا + ی) + ۵ لا + ۴ی = ۸۸ یعنی ۱۵ لا + ۳۱ ی = ۸۸ حل کلی اسکا لا = ۳ - ۳۱ ط اور ی = ۲ + ۱۵ ط بس صرف ایک حل مثبت صحاح کے واسطے لا = ۴ اور ی = ۲ ہے

(۳۰) فرض کرو کہ سیکڑی کے مرتبہ کے ہندسہ کو لا اور دہائی کے مرتبہ کے ہندسہ کو ی اور اکائیون کے مرتبہ مین صفر ہی اسلیئے کہ عدد دس پر پورا تقسیم ہوتا ہے تو

۱۰۰ لا + ۱۰ ی - (لا + ی) = ۹۹ یعنی ۹۹ لا + ۹ ی = ۹۹ اسسے معلوم ہوا کہ لا = ۱ اور ی = ۰ یہی قیمتین ہمارے مطلب سے متعلق ہوسکتی ہین

(۳۱) فرض کرو کہ عدد قسطاس احدعشری مین (۱۱)^۲ لا + ی اور قسطاس سباعی مین (۷)^۲ ی + لا (۱۱)^۲ لا + ی = (۷)^۲ ی + لا یعنی ۱۲۰ لا = ۴۸ ی اسواسطے ۵ لا = ۲ ی پس حل جو ہمارے مدعا سے متعلق ہے لا = ۲ اور ی = ۵ ہوسکتا ہے اسواسطے کہ لا اور ی مین سے کوئی بڑا چہ سے نہین ہوسکتا

(۳۲) فرض کرو کہ ہزارن کے مرتبہ ہندسہ لا اور دہن کے مرتبہ ہندسہ ی اور اکن کے مرتبہ ہندسہ ی ہے تو لا + ی + ی = ۲۰ اور $\frac{۱۰۰ لا + ۱۰ ی + ی - ۱۶}{۲}$ = ۱۰۰ ی + ۱۰ ی + لا اسواسطے ۹۸ لا - ۱۹ ی - ۱۹۹ ی = ۱۶ انمین ی کو ساقط کرو تو ۲۰۰ لا - ۱۸۹ ی = ۲۱۶ اسواسطے ۴ لا - ۷ ی = ۸ پس جو حل ہمارے مدعا سے متعلق ہو لا = ۱۹ اور ی = ۴ اور ی = ۷ ہے

(۳۳) فرضکرو کہ ہزارن کے مرتبہ پر ہندسہ لا اور سیکڑن کے مرتبہ پر ہندسہ ی اور دہن کے مرتبہ پر ہندسہ ی اور اکن کے مرتبہ پر ہندسہ و ہی تو

^{۳}۱۰ لا + ^{۲}۱۰ ی + ۱۰ ی + و = ^{۳}۹ و + ^{۲}۹ ی + ۹ ی + لا

اسواسطے ۹۹۹ لا + ۱۹ ی + ی - ۷۲۸ و = ۰

اب اسکو اگلی سی حل کرو و کے متواتر قیمتین ۱ اور ۲ و ۳ ۰ ۰ ۰ ۸ فرض کرو اگر و = ۱ تو

یہہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۱ کے ہونیسے کوئی حل نہین ہوگا اور وہ بڑہ جائیگا اگر
و = ۲ تو بہی کوئی حل نہ ہوگا اسلئی لا = ۱ بہت چہوٹا حل اور لا = ۲ بہت بڑا حل ہوگا

اگر د = ۳ تو بہی کوئی حل نہ ہوگا اسواسطے کہ لا = ۲ بہت چہوٹا حل اور لا = ۳ بہت بڑا حل ہوگا
اسطرح سی ہم کو معلوم ہوگا کہ صرف و = ۶ ایک حل ہے اور اسسے لا = ۱۵ اور
ر = ۱۵ اور ی = ۹ ہوگا

(۳۴) فرضکرو کہ بیلون کی تعداد لا اور بہیڑون کی تعداد ر اور سوروں کی تعداد ی ہی تو لا + ر + ی = ۰۰
اور ۱۰۰ لا + ۲۰ ر + ی = ۲۰۰۰ انمین سے ی کو دور کرو تو ۹۹ لا + ۱۹ ر = ۹-
حل کلی لا = ۱۹ ط اور ر = ۱۰۰ - ۹۹ ط اسواسطے ی = ۸۰ ط

(۳۵) فرض کرو کہ تین کسرین لا/۹ اور ر/۹ اور ی/۱۸ سے تعبیر ہون تو
لا/۹ + ر/۹ + ی/۱۸ = ۲ ۲/۳ اور لا/۹ + ی/۱۸ = ۱۶/۹
اسسے معلوم ہوا کہ ر/۹ = ۸/۹ پس ر = ۸ اسواسطے لا/۹ + ی/۱۸ = ۱۶/۹ اسواسطے
۲ لا + ی = ۳۲ اسکا حل کلی لا = ۵ - ط اور ی = ۱۷ + ۲ ط
اگر کسرین واجب ہون تو صرف وہی حل ہماری کام کا ہے جسمین ط = ۰

(۳۶) فرضکرو کہ لا دفعہ اول گہنٹہ اور ر دفعہ دوسرا گہنٹہ اور ی دفعہ تیسرا گہنٹہ بجا
چونکہ دوسرے گہنٹہ کے اواز ۱۸ سکنڈ بعد اور تیسرے گہنٹہ کے آواز ۲۱ سکنڈ بعد موقوف ہوئی اسلئی
۲۵ (لا - ۱) = ۲۹ (ر - ۱) - ۱۸ = ۳۳ (ی - ۱) - ۲۱ اول مساوات
۲۵ (لا - ۱) = ۲۹ (ر - ۱) - ۱۸ کو حل کرو تو اوسکا حل کلی لا = ۲۰ + ۲۹ ر
اور ر = ۱۸ + ۲۵ ر اب ۲۵ (لا - ۱) = ۳۳ (ی - ۱) - ۲۱ اسمین جو لا کے واسطے حل
حاصل کیا ہی مندرج کرو تو ۲۵ × ۲۹ ر - ۳۳ ی + ۵۲۹ = ۰ اسکا حل کلی یہہ ہے
ر = ۱ + ۳۳ ط اور ی = ۳۸ + ۲۵ × ۲۹ ط

اسے معلوم ہوا کہ لا = ۴۹ + ۲۹ × ۳ × ۳ ط اور حملہ کلی سکنڈون ہین جسے یہہ معلوم ہوا کہ اون کا شکلتی دریجا
= ۲۵ (۴۸ + ۲۹ × ۳ × ۳ × ط) ہی اور چونکہ یہہ وقت نصف گہنٹہ سے کم ہے اسلیے ط = ۰

(۳۷) فرضکرو کہ اول چھڑی کے لا دین نشان اور دوسرے چھڑی کے ردین نشان کی درمیان فاصلہ دریافت کرنا ہے
مشترک کسری سے م لا/ح انچ فاصلہ اول چھڑی کا نشان اور ن ح/ک انچ فاصلہ ہر دوسرے چھڑی کی نشان پر ہوگا۔
پس اونمین فاصلہ لا/ح س ر/ح انچ ہوگا یعنی م/ح (لان س ر م) انچ اب ہم لان س ر م = ۰ کے
نہین فرض کر سکتی اسواسطے کہ اگر ایسا ہو تو ر = لا/ن تو م ن مختصر الحدین ہوجاینگے اور یہہ خلاف فرض ہے
لیکن ہم لان س ر م = ۱ کے فرض کر سکتے ہین اور واقع مین ہم بموجب دفعہ ۴۳۱ کی لان س ر م = ۱
اور ن لا س ر م = ۱ کو حل کر سکتی ہین

تمثیلاً اگر م = ۲۵۰ اور ن = ۲۴۳ تو لا = ۱۰۷ اور ر = ۱۰۴ ایک حل مساوات
لان س ر م = ۱ کا اور لا = ۲۵۰ - ۱۰۷ اور ر = ۲۴۳ - ۱۰۴ ایک حل مساوات لان س ر م = ۱ کا ہی

(۳۸) فرضکرو کہ ایک خانہ مین پانچ جلدون کے سیٹ لا اور ۴ جلدون کے ر سیٹ اور ۳ جلدون کے ی سیٹ ہین
تو ۵ لا + ۴ ر + ۳ ی = ۲۰ اب ان مساوات کے حل دریافت کرنی چاہئی۔ اور اتکل سے
معلوم کرنا چاہی کہ تین حل ایسی ہین جنمین لا کی قیمتون کا مجموعہ ۳ اور ر کی قیمتون کا مجموعہ ۶ اور ی کے قیمتون کا مجموعہ ہے

(۳۹) فرض کرو کہ ح سکس پنس کی جمع ہی اور وہ لا ہاف کرون اور ر شلنگ سی ادا کی گئی ہے تو
۵ لا + ۲ ر = ح اب بموجب دفعہ ۴۳۴ کے حلون کی تعداد ح/۵×۲ سے فرق ایک سے زیادہ
نہین رکھہ سکتی پس اب امتحان ح کی قیمتون کا ح = ۱۰۰ شروع کرنے مین ح = ۱۰۰ اسکے رکھو تو
بموجب صورت چہارم دفعہ ۴۳۴ کے ۱۱ حل ہونگی اب ح = ۱۰۱ اسکے رکھو تو بموجب صورت اول
دفعہ مذکور کے ۱۰ حل ہونگی ح = ۱۰۲ رکھو تو بموجب صورت سوم ۱۱ حل ہونگے
اور ح = ۱۰۳ رکھو تو بموجب صورت اول ۱۰ حل ہونگی اور ح = ۱۰۴ رکھو تو بموجب
صورت سوم ۱۱ حل ہونگے ح = ۱۰۵ تو جب صورت دوم ۱۱ حل ہونگے پس ح کی بڑی
سے بڑی قیمت ۱۰۳ اور ۱ حل ہو سکتی ہے

(۴۰) ۳۹ مثال کی طرح عمل کرو دفعہ ۱۴۳۴ کے چار صورتوں کا امتحان کرو تو صورت چہارم سے ح کے بڑی سے بڑی قیمت موافق اون حلوں کے جنکے تعداد معلوم ہو دریافت ہوگی اگر ہم ح = ۱۱۰ تو ٹھیک ۱۰ حل حاصل ہونگے اور ح کے قیمت ایسی بڑی قیمت ایسی بڑی قیمت اول مین ۹ حل نہ رکھینگے مثلاً ح = ۱۱ تو بموجب صورت اول ۱۱ حل ہونگے

سینتالیسوان باب

(۱) ی (۳ لا − ۴) = ۱۴ − ۳ لا اسواسطے ی = $\frac{-۳ لا + ۱۴}{۳ لا - ۴}$ = − ۱ + $\frac{۱۰}{۳ لا - ۴}$ اسواسطے ۳ لا − ۴ = ± ۱ یا ± ۲ یا ± ۵ امتحان سے یہہ معلوم ہوگا کہ وہ صورتین جنمین لا اور ی قیمت صحاح ہون ۳ لا − ۴ = ۲ یا ۵ ہین

(۲) ی (لا − ۳) = ۲۹ + ۲ لا − لا² اسواسطے ی = $\frac{- لا^2 + ۲ لا + ۲۹}{لا - ۳}$ = − لا − ۱ + $\frac{۲۶}{لا - ۳}$ اسواسطے لا − ۳ = ± ۱ یا ± ۲ یا ± ۱۳ یا ± ۲۶ امتحان سے یہہ معلوم ہوگا کہ لا − ۳ = ۱ یا ۲ کے لینا چاہیئے

(۳) ۱۳/۱۰ کے خارج قسمت ۱ و ۳ و ۱ و ۲ اور متقربین $\frac{۱}{۱}$ و $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۱۴}{۱۱}$ و $\frac{۱۸}{۵}$ . . . ہین

(۴) خارج قسمت ۱ و ۲۰ . . . . . . مثال ۱۱ باب ۴۵ اول متقرب $\frac{۱}{۲}$ ہے

(۵) فرض کرو کہ اعداد مین سے ایک عدد م ہو تو م = ن² − ۱ = ۱۰ م² اسواسطے ن² − ۱۰ م² = ۱ پس م اور ن کی قیمتین ایسی دریافت کرو کہ شرائط مساوات کو پورا کرین √۱۰ کے متقربین دریافت کرو تو دوسرا متقرب $\frac{۱۹}{۶}$ ہوگا پس ن = ۱۹ اور م = ۶ اسطرح سے یہہ کم سے کم حل دریافت ہوگا اور م = ۳۶۰

(۶) فرض کرو کہ چراگاہ مین لا² + ۳ مربع گز ہین اور اوسی کی بہائی کے چراگاہ مین ی² ہے تو ی² + ۱ = $\frac{۱}{۲}$ (لا² + ۳) اسواسطے لا² − ۲ ی² = − ۱ اور √۲ سے کے متقربین $\frac{۱}{۱}$ و $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۷}{۵}$ و $\frac{۱۷}{۱۲}$ و $\frac{۴۱}{۲۹}$ و $\frac{۹۹}{۷۰}$ . . . ہین اب چونکہ چراگاہ درمیان ۱ اور ۲ رود کی واقع ہے تو ۱۲۱۰ اور ۲۴۲۰ کے درمیان لا² + ۳ ہوگا اسیواسطے لا = ۴۱ اور ی = ۲۹ کے ہونا چاہئے

(۷) فرض کرو کہ جذر کے صحیح حصہ کو لا اور عدد کو لا + ی تعبیر کرتا ہے تو لا + ی = ۳ لا + ۱ بلحاظ لا مساوات حل کرو تو لا = ۳ ± √(۱۳ + ۴ی) / ۲ پس ی کی متواتر قیمتین ۲ اور ۱۰ وغیرہ مقرر کیجے تو معلوم ہوگا کہ ی = ۱۱ اور ی = ۳ ایسے قیمتین ہین جو داخل ہو سکتی ہین اسواسطے کہ ۳ سے بڑا ی ہو تو لا نا ممکن ہو جایگا

(۸) ہم کو معلوم ہے کہ ی = ب − لا لا اب ظاہر ہے کہ لا بڑا √(ب/ا) سے نہین ہو سکتا پس اسسے معلوم ہوا کہ مثبت صحاح مین حل محدود ہین

(۹) مساوات درجہ دوم کو بلحاظ ی کے حل کرو تو ی = ۱/۳ [لا ± √(۸۰ − ۲ لا²)] پس جو لا کی قیمتین مساوات مین دخل رکہتی ہین ۰ اور ۲ ہین

(۱۰) ۲ لا² − ۹ لا ی + ۷ ی² = (۲ لا − ۷ ی) (لا − ی) پس (۲ لا − ی) (لا − ی) = ۳۸

پس جن صورتون کا امتحان کرنا منظور ہو وہ یہ ہین ۲ لا − ۷ ی = ± ۱۹ اور لا − ی = ± ۲ اور ۲ لا − ۷ ی = ± ۲ اور لا − ی = ± ۱۹ اور ۲ لا − ۷ ی = ± ۳۸ اور لا − ی = ± ۱ اور ۲ لا − ۷ ی = ± ۲ اور لا − ی = ± ۳۸

پھر امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ جو صورتین مساوات مین دخل رکہتی ہین ۲ لا − ۷ ی = − ۱۹ اور لا − ی = − ۲ اور ۲ لا − ۷ ی = ۱ اور لا − ی = ۳۸

(۱۱) دفعہ ۳۴۴ مین صور جبریہ مین بجای ع کے ۲۴ اور بجای ق کے ۵ اور بجای ن کے ۱۳ رکہو

(۱۲) دفعہ ۳۴۵ کے صور جبریہ مین بجای ع کے ۳ اور بجای ق کے ۱۱ اور بجای ن کے ۲ رکہو اور بجای م کے ۳ اور بجای ن کے ۲ رکہو مثال چہٹی دیکھو

اڑتالیسوان باب

(۱) ۱ / (۳ − ۲ لا) = ۱/۳ (۱ − ۲ لا/۳)^{-۱} = ۱/۳ [۱ + ۲ لا/۳ + (۲ لا/۳)² + ... + (۲ لا/۳)^ن + ...]

(۲) ۲ − لا − ۳ لا² = (۱ + لا) (۲ − ۳ لا) پس فرض کرو کہ

(۵ − ۱۱ لا) / ((۱ + لا)(۲ − ۳ لا)) = ط / (۱ + لا) + ص / (۲ − ۳ لا)

(۱۰) تقسیم کرنے سے (۱ − لا^۳) / (۲ − ۲ لا − لا^۲) = لا − ۲ + (۵ − ۶ لا) / (۲ − ۲ لا − لا^۲) = لا − ۲ + (۵/۲ − ۳ لا) / (۱ − لا − ½ لا^۲)

دوسری کسر بموجب دفعہ ۴۵۳ کے پھیل سکتی ہے اور اول رقم ۵/۲ ہے اور دوسری رقم − ½ لا ہے

اور قواء لا کے اور امثال متواتر اس قاعدہ سے دریافت ہو سکتی ہیں کہ د~ن~ = د~ن−۱~ + ½ د~ن−۲~

(۱۱) ۱ / (ن^۲ + ن لا + لا^۲) = ۱/ن^۲ · ۱ / (۱ + لا/ن + لا^۲/ن^۲) بموجب دفعہ ۴۵۳ کے ۱ / (۱ + لا/ن + لا^۲/ن^۲) کی اول رقم ۱ ہے

اور دوسری رقم − لا/ن ہے اور قواء لا کے امثال متواتر اس قاعدہ سے دریافت ہوتے ہیں کہ د~ن~ + ۱/ن د~ن−۱~ + ۱/ن^۲ د~ن−۲~ = ۰

(۱۲) فرض کرو کہ صورت مفصلہ مطلوب د. + د~۱~ لا + د~۲~ لا^۲ + د~۳~ لا^۳ + ... ہے تو

۱ = (۱ − ع لا + ع لا^۲ − لا^۳) (د. + د~۱~ لا + د~۲~ لا^۲ + د~۳~ لا^۳ + ...)

اب د. اور د~۱~ اور د~۲~ وغیرہ کے دریافت کرنے کے واسطے ۱ = د. اور ۰ = د~۱~ − ع د. اور

۰ = د~۲~ − د~۱~ ع + د. ع اور اعلے درجہ کے امثال متواتر اس قانون سے دریافت ہونگے کہ

د~ن~ − ع د~ن−۱~ + ع د~ن−۲~ − د~ن−۳~ = ۰

(۱۳) ر ویں رقم ن^(ر−۱) لا / ((۱ + ن^(ر−۱) لا)(۱ + ن^ر لا)) ہے ہم کو فرض کرو = ط / (۱ + ن^(ر−۱) لا) + ص / (۱ + ن^ر لا) تو

ن^(ر−۱) لا = ط (۱ + ن^ر لا) + ص (۱ + ن^(ر−۱) لا) = ط + ص + ن^(ر−۱) (ط ن + ص) لا

اسواسطے ط + ص = ۰ اور ط ن + ص = ۱ پس ط = ۱/(ن − ۱) اور ص = − ۱/(ن − ۱) اور

جب سلسلہ کی ہر ایک رقم کی تحلیل کیجاوے تو سب رقمیں آپس میں ایک دوسرے کو محو کرنے سے

فنا ہو جاینگے الا اول اور آخر رقم

(۱۴) ر ویں رقم ن^(ر−۱) لا (۱ − ن^ر لا) / ((۱ + ن^(ر−۱) لا)(۱ + ن^ر لا)(۱ + ن^(ر+۱) لا)) ہے فرض کرو کہ یہہ

= ط / (۱ + ن^(ر−۱) لا) + ص / (۱ + ن^ر لا) + س / (۱ + ن^(ر+۱) لا) تو موافق سابق کے عمل کرنے سے

ن^(ر−۱) لا (۱ − ن^ر لا) = ط + ص + س + ن^(ر−۱) لا [ط (ن + ن^۲) + ص (۱ + ن^۲) + س (۱ + ن)]

+ ن^(۲ر−۱) لا^۲ [ط ن^۳ + ص ن + س] اسواسطے ط + ص + س = ۰ اور

ط (ن + ن^۲) + ص (۱ + ن^۲) + س (۱ + ن) = ۱ اور ط ن^۳ + ص ن + س = − ۱ ایسے

ط = س = − ۱ / (ن − ۱)^۲ اور ص = ۲ / (ن − ۱)^۲ پس جب سلسلہ کے ہر ایک رقم کے تحلیل

بموجب دفعہ ۶۴۸ کے یہہ ضرور ہونی چاہئے کہ ع کم ن سے ہو

اونچاسوان باب

(۱) اول ہم ع اور ق کو ان مساواتوں سے دریافت کرتے ہین کہ ۲۱ = ۹ ع + ۴ ق اور ۵۱ = ۲۱ ع + ۹ ق پس ع = ۵ اور ق = -۶ تو بموجب دفعہ ۶۵۶ کے جملہ مطلوب $\frac{۲ - ۱۱ لا}{۱ - ۵ لا + ۶ لا^{۲}}$ ہوا اسکو فرض کرو کہ = $\frac{ط}{۱ - ۲ لا} + \frac{ص}{۱ - ۳ لا}$ تو ط = ۳ اور ص = ۱

(۲) ۸۹ = ۱۱ ع + ق اور ۶۵۹ = ۸۹ ع + ۱۱ ق پس ع = ۱۰ اور ق = -۲۱ پس جملہ مطلوب $\frac{۱ + لا}{۱ - ۱۰ لا + ۲۱ لا^{۲}}$ اور یہہ برابر $\frac{۲}{۱ - ۷ لا} - \frac{۱}{۱ - ۳ لا}$ کے دریافت ہوگا

(۳) ۱۱ = ۳ ع + ق اور ۴۳ = ۱۱ ع + ۳ ق پس ع = ۵ اور ق = -۴ پس جملہ مطلوب $\frac{۱ - ۲ لا}{۱ - ۵ لا + ۴ لا^{۲}}$ اور یہہ = $\frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۱ - لا} + \frac{۲}{۳} \cdot \frac{۱}{۱ - ۴ لا}$

(۴) $\frac{۱}{۱ - لا}$ کی صورت مفصلہ اگر لا ایک سے چھوٹا ہو انضمامی ہے اور $\frac{۱}{۱ - ۴ لا}$ کی صورت مفصلہ اگر ۴ لا چھوٹا ایک سے ہو تو انضمامی ہے پس دونو صورت مفصلہ اگر ۴ لا چھوٹا ایک سے ہو انضمامی ہین

(۵) ۳۲ = ۱۱ ع + ۳ ق اور ۸۴ = ۳۲ ع + ۱۱ ق پس ع = ۴ اور ق = -۴ اسے معلوم ہوا $\frac{۳ - لا}{۱ - ۴ لا + ۴ لا^{۲}}$ کے صورت مفصلہ مین یعنی $(۳ - لا)(۱ - ۲ لا)^{-۲}$ کے صورت مفصلہ مین $لا^{ن}$ کا سر رقم عام ہے اور اسمین یہہ سر $۳ (ن + ۱) ۲^{ن} - ن ۲^{ن - ۱}$ ہے ۴۸ باب ۶ مثال دیکھو

(۶) اول ہم رقم عام دریافت کرتے ہین اول ہم فرض کرتے ہین کہ سلسلہ ایک سلسلہ مدوری ہے اور اوسکا قسطاس ۱ - ع - ق ہے اور ع اور ق دریافت کرنے کے لئے ۱۷ = ۵ ع + ق اور ۵۳ = ۱۷ ع + ۵ ق پس ع = ۴ اور ق = -۳ اور ہم یہہ دیکھتے ہین کہ یہہ قانون اور اگے کی دو رقموں مین دریافت ہوتا ہے پس $\frac{۱ + لا}{۱ - ۴ لا + ۳ لا^{۲}}$ کے صورت مفصلہ مین $لا^{ن}$ کا رقم عام ہے اور یہہ کسر = $\frac{۲}{۱ - ۳ لا} - \frac{۱}{۱ - لا}$ پس (ن + ۱) وین رقم $۲ \times ۳^{ن} - ۱$ ہے اور اول ن رقموں کا حاصل جمع اسانی سے دریافت ہوسکتا ہے

(۷) ۱۰ = ۴۶ ع + ۱۰ ق اور ۹ = ۱۰ ع + ۴۶ ق یعنی ع = ۵/۹ اور ق = ۱/۹

اسسے معلوم ہوا کہ (۱۰ + ۴۶/۹ لا) ÷ (۱ − ۵/۹ لا + ۱/۹ لا²) کے صورت مفصلہ مین لاⁿ کا سر رقم عام ہے اور

پہر کسر = ۶۴/(۱ − ۱/۲ لا) − ۵۴/(۱ − ۱/۳ لا) اسسے ہم رقم عام دریافت کرسکتے ہین اور سلسلہ غیر متناہی کا مجموعہ

مجموعہ لا = ۱ کے رکہنے سے ۱۲۸ − ۸۱ یعنی ۴۷ حاصل ہوتا ہے

(۸) قسطاس ارتباط ۱ − ع لا − ق لا² − ر لا³ فرض کرو تو

−۵ = ۲ع − ق + ۲ر اور ۱ = −۵ع + ۲ق − ر اور −۱۷ = ۱۰ع − ۵ق + ۲ر

پس اسسے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع = −۳ اور ق = −۳ اور ر = −۱ فرض کرو کہ سلسلہ

(ا + ب لا + ح لا²) ÷ (۱ + ۳لا + ۳لا² + لا³) کے تشریح ہے یعنی (ا + ب لا + ح لا²) ÷ (۱ + لا)³ کی تو دفعہ ۴۵۳ کے طرح

ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ا + ب لا + ح لا² = (۱ + ۳لا + ۳لا² + لا³)(۲ − لا + ۲لا² − ۵لا³ + ...)

اسسے معلوم ہوا کہ امثالون کو برابر لکہنے سے ا = ۲ اور ب = ۶ − ۱ = ۵ اور ح = ۶ − ۳ + ۲ = ۵

بموجب دفعہ ۵۲۱ (۲ + ۵لا + ۵لا²)(۱ + لا)⁻³ کے تشریح مین لاⁿ کے امثال

[۲(ن+۱)(ن+۲) − ۵ن(ن+۱) + ۵(ن−۱)ن] (−۱)ⁿ/(۱·۲) یعنی (ن² − ۲ن + ۲)(−۱)ⁿ ہین

پچاسوان باب

(۱) یہہ دفعہ ۶۶۱ کے خاص صورت ہے یعنی جسمین ا = ۱ اور ب = ۰ پس س اور دفعہ مین خاص ہوتا ہے

(۲) ا = ۱ اور ب = ۰ دفعہ ۶۶۳ کے حاصل مین رکہو تو یہہ مجموعہ حاصل ہوگا کہ

۱/(م−۱) [۱/|م−۱ − ۱/((ن+۱)(ن+۲) ... (ن+م−۱))]

(۳) ۱/(۱×۲) = ۱ − ۱/۲ اور ۱/(۲×۳) = ۱/۲ − ۱/۳ ... ۱/(ن(ن+۱)) = ۱/ن − ۱/(ن+۱)

پس جمع کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ۱ − ۱/(ن+۱) اور جب ن غیر متناہی ہو تو ۱/(ن+۱) معدوم ہوتا ہے

(۴) ن وین رقم = ۱/(۲ن(۲ن+۲)(۲ن+۴)) = ۱/(۸ن(ن+۱)(ن+۲)) اسی معلوم ہوا کہ مجموعہ

م = ۳ مثال ۲ مین رکہنے سے اور ۸ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۵) ن وین رقم = ۱/(ن(ن+۳)) = ۱/۳ (۱/ن − ۱/(ن+۳)) اسطرح سے ہر ایک رقم کو دو قسموں مین

پس مج ن+۱ = مج ن + ن ۱/(۱+۱) لیکن مج ۱ = ۱ پس مج ۲ = ۱ + ۱/۲ اور مج ۳ = ۱ + ۱/۲ + ۱/۳ اور

(۱۷) (۱/(۱−لا) − ۱)^ن = ۱/(۱−لا)^ن − ن/۱ · ۱/(۱−لا)^(ن−۱) + ن(ن−۱)/(۱×۲) · ۱/(۱−لا)^(ن−۲) ...

بائین طرف جو ارقام ہین اونکو تبلاؤ اور لا^ع کے سر منتخب کرو تو جملہ معلوم حاصل ہوگا

اور لا^ن/(۱−لا)^ن کے صورت مفصلہ مین اگر ن بڑا ع سے ہے تو کوئی رقم

ایسے نہ ہوگی جسمین لا^ع شامل ہو پس جملہ مفروض صفر ہوگا

(۱۸) ن = ۹ صور جبریہ (۱) دفعہ ۶۶۷ مین رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱۱×۱۰×۹/۶

(۱۹) اب یہہ تو وہ اون دو تودون کا فرق ہے جسکے قاعدہ کے ہر ایک ضلع مین

۱۵ گولیان ہین اور سر کے اوپر ۱۰ گولیان اصلی تعداد مطلوب ۱۶×۱۶×۱۵/۶ − ۱۲×۱۱×۱۰/۶

(۲۰) چوٹی کی تہ پر م ن گولے ہین اور دوسری تہ پر (م+۱) (ن+۱) گولے اور اوسکی بعد تہ پر

(م+۲) (ن+۲) گولے اور علی ہذا القیاس مجموعہ اس سلسلہ کے ع رقموں کا

ع م ن + (م+ن) [۱+۲+ ... (ع−۱)] + ۱^۲ + ۲^۲ + ... (ع−۱)^۲ یعنے

ع م ن + (م+ن) ع(ع−۱)/۲ + ع(ع−۱)(۲ع−۱)/۶ ان رقموں کو جمع کرو

(۲۱) یہہ ایک مثال دفعہ ۶۷۱ کی ہے جہان ر = ۴ اسسے ہم کو اول صورت جبریہ

مجموعہ کے لئے دریافت ہوتی ہے اور جب نفس الامر مین ضربے دین تو ہم ثابت کرینگے کہ

دوسرے صورت جبریہ برابر پہلی صورت جبریہ کی ہے

(۲۳) فرض کرو کہ (۱+لا) (۱+ح لا) (۱+ح^۲ لا) + ... = ۱ + ط۱ لا + ط۲ لا^۲ + ط۳ لا^۳ + ...

اسمین ط۱ و ط۲ ... مین لا شامل نہین ہے اب لا کو ح لا سے تبدیل کرو تو نتیجہ حاصل ہوگا کہ

(۱+لا) [۱ + ط۱ ح لا + ط۲ ح^۲ لا^۲ + ط۳ ح^۳ لا^۳ + ...) = ۱ + ط۱ لا + ط۲ لا^۲ + ...

اب لا کے سرون کو جو دونو طرف ہین اسمین برابر لکہو تو ط ر ح^ر + ط ر−۱ ح^(ر−۱) = ط ر

اسواسطے ط ر (۱ − ح^ر) = ط ر−۱ ح^(ر−۱) اب ر کے جگہ متواتر ۱ و ۲ و ۳ ... رکہو

تو متواتر ہم کو ط۱ و ط۲ و ط۳ ... دریافت ہونگے اور یہہ خیال مین رکہین کہ ط۰ بجاے ۱ کے ہے

(٧) لا^{٢} − ٨لا + ٢٢ = (لا − ٤)^{٢} + ٦ یہہ چھہ سے کم نہیں ہو سکتا

(٨) ٢لا^{٣} − لا − ١ = ٢(لا^{٣} − لا) + لا − ١ = (لا − ١)[٢لا(لا + ١) + ١] یہہ مثبت اگر لا > ١ اور منفی ہی اگر لا < ١

(٩) لا + ١/(ن لا) − (١ + ١/ن) = لا − ١ + ١/ن (١/لا − ١) = ١/لا (لا − ١)(لا − ١/ن)
یہہ مثبت ہے اگر لا > ١ اور منفی ہے اگر لا < ١/ن

(١٠) (ا + لا)(ب + لا)/لا = اب/لا + ا + ب + لا = (√(اب/لا) − √لا)^{٢} + ا + ب + ٢√(اب)
پس قیمت کم از کم جب ہوگی کہ (√(اب/لا) − √لا)^{٢} = ٠ یعنے جب لا = √(اب)

(١١) فرض کرو کہ طاق عدد صحیح ٢ن + ١ ہو اور دو حصوں میں سے ایک حصہ لا ہو تو دوسرا حصہ ٢ن + ١ − لا ہوگا اور حاصل ضرب لا(٢ن + ١ − لا) اسکو ی سے تعبیر کرو تو
لا^{٢} − (٢ن + ١)لا + ی = ٠ اسواسطے لا = [٢ن + ١ ± √((٢ن + ١)^{٢} − ٤ی)] / ٢
علامت جذر کے اندر جو مقدار ٤(ن^{٢} + ن − ی) ہی پس ی کے بڑی سے بڑی ممکن قیمت ن^{٢} + ن ہی کیونکہ ی صحیح ہے اسی معلوم ہوتا ہے کہ لا = ن یا ن + ١ پس دو حصے ن اور ن + ١ ہوی

(١٢) √(ا^{٢} − ب^{٢}) + √(٢اب − ب^{٢}) > ا ہی اگر √(٢اب − ب^{٢}) > ا − √(ا^{٢} − ب^{٢})
یعنی اگر ٢اب − ب^{٢} > ا^{٢} + ا^{٢} − ب^{٢} − ٢ا√(ا^{٢} − ب^{٢}) یعنی اگر √(ا^{٢} − ب^{٢}) > ا − ب
یعنی ا^{٢} − ب^{٢} > (ا − ب)^{٢} یعنے اگر ا + ب > ا − ب اور یہہ ظاہر ہے

(١٣) چونکہ ا و ب و ح سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ا = ب ح/(٢ح − ب) اور چونکہ ب و ح و د سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو د = ب ح/(٢ب − ح) پس
ا + د − (ب + ح) = ب ح/(٢ح − ب) + ب ح/(٢ب − ح) − (ب + ح)
= ب ح(ب + ح)/[(٢ح − ب)(٢ب − ح)] − (ب + ح) = (ب + ح)[ب ح − (٢ح − ب)(٢ب − ح)] / [(٢ح − ب)(٢ب − ح)]
= ٢(ب + ح)(ب − ح)^{٢} / [(٢ح − ب)(٢ب − ح)]
یہہ مثبت ہی اسواسطے کہ ٢ح − ب اور ٢ب − ح مثبت ہیں کیونکہ ا اور د مثبت بموجب فرض کے ہیں

(۱۴) دو مقدارون ا اور ح مین سے فرض کرو کہ ا بڑا ہے

ا^ن + ح^ن - ۲ ب^ن = ا^ن - ب^ن - (ب^ن - ح^ن)

(ا - ب) [ا^(ن-۱) + ا^(ن-۲) ب + ...] - (ب - ح) [ح^(ن-۱) + ح^(ن-۲) ب + ...]

اب یہہ جملہ مثبت ہے اسواسطے کہ ا - ب = ب - ح بموجب دفعہ ۴۷۹ کے اور

ا^(ن-۱) + ا^(ن-۲) ب + ... ظاہرا بڑا ح^(ن-۱) + ح^(ن-۲) ب + ...

(۱۵) (لا + ا) / √(لا^۲ + ا^۲) > یا < (لا + ب) / √(لا^۲ + ب^۲) جیسا کہ (لا + ا)^۲ / (لا^۲ + ا^۲) > یا < (لا + ب)^۲ / (لا^۲ + ب^۲)

یعنی جیسا کہ ۱ + ۲ ا لا / (لا^۲ + ا^۲) > یا < ۱ + ۲ ب لا / (لا^۲ + ب^۲) یعنی جیسا کہ ا (لا^۲ + ب^۲) > یا < ب (لا^۲ + ا^۲)

یعنی جیسا کہ (ا - ب) لا^۲ > یا < ا ب (ا - ب)

(۱۶) یہہ دریافت ہوگا کہ ا^۲ ب + ب^۲ ح + ح^۲ ا - (ا^۲ ح + ب^۲ ا + ح^۲ ب) = (ب - ا) (ح - ب) (ا - ح)

اب اگر ا و ب و ح مین ترتیب تنازلی ہے تو ب - ا منفی ہو ح - ب منفی ہے ا - ح مثبت ہے

تو حاصل ضرب مثبت ہوا اسی طرح دوسری صورت بھی بیان ہوسکتی ہے

(۱۷) سب کو آپسمین ضرب دو اور سب رقمون کو داہنی طرف لے آؤ

ط^۲ ب^۲ + س^۲ ا^۲ - ۲ ط ا ص ب + ط^۲ ح^۲ + س^۲ ا^۲ - ۲ ط ح س ا + ... یعنی

(ط ب - ص ا)^۲ + (ط ح - س ا)^۲ - ... حاصل ہوگا اسواسطے یہہ جملہ مثبت ہے

(۱۸) ۲ (ا^۳ + ب^۳ + ح^۳) > ا ب (ا + ب) + ب ح (ب + ح) + ا ح (ح + ا) بموجب مثال پنجم

اور (ا^۳ + ب^۳ + ح^۳) / ۳ > (ا^۳ ب^۳ ح^۳)^(۱/۳) بموجب دفعہ ۴۸۱ پس ا^۳ + ب^۳ + ح^۳ > ۳ ا ب ح

جمع کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا

(۱۹) ۶ ا ب ح < ا ب (ا + ب) + ب ح (ب + ح) + ح ا (ح + ا) بموجب مثال پنجم

اور جو اوپر حل لکھا ہے اوسکے مطابق ۳ ا ب ح < ا^۳ + ب^۳ + ح^۳ جمع کرو

(۲۰) ۲ مین ضرب دیکر سب رقمون کو داہنی طرف لے آؤ تو اوسی یہہ ایک صنف مجذورون کی

(√ا - √ب)^۲ + (√ا - √ح)^۲ + ... + (√ب - √ح)^۲ + ...

ہر زوج مقادیر کے لیے ایک مربع حاصل ہوگا اسواسطے یہہ جملہ مثبت ہے

(۲۱) فرض کرو کہ ا اور ب دو اعداد ہوں اور ا بڑا ہو تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{(ا-ب)^۲}{۸ب}$ اور بڑا بہ نسبت $\frac{(ا-ب)^۲}{۸ا}$ کے ہے

اب $\frac{ا+ب}{۲} - \sqrt{اب}$ یعنی $< \frac{(ا-ب)^۲}{۸ب}$ اگر ۴ب $(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^۲ < (ا-ب)^۲$

یعنی اگر ۲ب $< (\sqrt{ا} + \sqrt{ب})$ یعنی اگر ۲ $\sqrt{ب} < \sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ اور یہہ صورت ظاہر ہے

اسی طرح مثال کا دوسرا حصہ بیان ہو سکتا ہے

(۲۲) ن مقادیر ا و ۲ و ۳ ۰ ۰ ۰ ن فرض کرو اونکا مجموعہ $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ ہے پس اونکا اوسط حسابیہ $\frac{ن+۱}{۲}$ ہے اسیواسطے $\frac{ن+۱}{۲} > [ن]^{\frac{۱}{ن}}$ بموجب دفعہ ۴۸۱

(۲۴) ن مقادیر ا و ۳ و ۵ ۰ ۰ ۰ ۲ن-۱ مقرر کرو اونکا مجموعہ ن۲ ہے اور اونکا اوسط حسابیہ ن ہے پس اب دفعہ ۴۸۱ کا استعمال کرو

(۲۵) بموجب مثال ۲۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ $\underline{۲ن} > (۲ن)^ن$ یعنے

$(۲ن-۱)(۲ن-۳) \ldots ۳ \times ۱ \times ۲^ن \underline{ن} > (۲ن)^ن$

طرفین کو ۲ن ن ن پر تقسیم کرو تو ہم کو نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوگا

(۲۶) $ا^۲(ب^۲+ح^۲) > ۲ا^۲بح$ اور $ب^۲(ح^۲+ا^۲) > ۲ب^۲حا$ اور $ح^۲(ا^۲+ب^۲) > ح^۲اب$ اسواسطے $ا^۲ب^۲ + ب^۲ح^۲ + ح^۲ا^۲ > (ا+ب+ح)$ ابح مثل مثال سوم یہہ بھی ہم کو حاصل ہے کہ $ا^۴+ب^۴+ح^۴ > ا^۲ب^۲ + ب^۲ح^۲ + ح^۲ا^۲$

(۲۷) $۶(ا^۳+ب^۳+ح^۳) > ۳[اب(ا+ب) + بح(ب+ح) + حا(ح+ا)]$ بموجب مثال نہم

$۲(ا^۳+ب^۳+ح^۳) > ۶$ ابح مثال ۱۸ جمع کرو

(۲۸) ضرب دیگر غیر مساوات کے یہہ صورت بنالو

$۲(ا^۳+ب^۳+ح^۳) >$ اب $(ا+ب)$ + بح $(ب+ح)$ + حا $(ح+ا)$ یہہ مثال نہم

(۲۹) بچیسویں باب کی تیسری مثال دیکھو یا اسطرح عمل کرو کہ

$(ا+ب+ح)^3$ > ۲۷ ا ب ح یہہ ایک صورت دفعہ ۱۹۸ کی ہے اور
$(ا+ب+ح)^3 = ا^3 + ب^3 + ح^3 + (ا+ب)(ب+ح)(ح+ا)$ اور یہہ
> $۹(ا^3+ب^3+ح^3)$ بموجب مثال ۲۷

(۳۰) $\frac{لوک_{۱}(۱-ع)}{لوک_{۱}(۱-ق)} = \frac{لوک_{ی}(۱-ع)}{لوک_{ی}(۱-ق)} = \frac{ع + \frac{ع^2}{۲} + \frac{ع^3}{۳} + \ldots}{ق + \frac{ق^2}{۲} + \frac{ق^3}{۳} + \ldots}$

یہہ > $\frac{ع+ع^2+ع^3+\ldots}{ق}$ اور > $\frac{ع}{ق+ق^2+ق^3+\ldots}$ اور

یہہ > $\frac{ع}{ق(۱-ع)}$ اور > $\frac{ع}{ق\times\frac{۱}{۱-ق}}$

(۳۱) ضرب دی لو تو حاصل ایک صورت دفعہ ۱۹۸ کی ہوگی اور ان مقادیر ہونگیں جنمین اول مقدار
$ا^ن$ اسو ا ہو - ان ہوگی اور مقادیر بہی اسیکے مثل ہونگیں

(۳۲) یہہ الحرامین خود حل ہے - اور ہم اسطرح یہی عمل کرکے ثابت کرسکتے ہین کہ
ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ ا + ا لا > لا + $ا^{لا}$ اسمین لا کے جگہہ $\frac{ع}{ق}$ رکہو جسمین ع اور ق
صحیح اعداد ہون پس ہم کو یہہ ثابت کرنا ہی کہ $\frac{ق-ع+ع ا^ق}{ق}$ > $ا^{\frac{ع}{ق}}$ اب یہہ ظاہر ہے بموجب
دفعہ ۱۸۱ کے ہی کیونکہ دائین طرف اوسط حسابیہ ق مقادیر مین جنمین سے
ع مقادیر برابر ہین ا کے اور باقی برابر ا کے اور بائین طرف اوسط ہندسیہ
ق مقادیر کے ہین

باونوان باب

(۱) ع - ق = ع + ق - ۲ ق یہہ فرق دو جفت عددون کا ہی اسلئے وہ بہی جفت ہے
(۲) ۳۲۳۴ کو متباین اجزا ضربی مین تحلیل کیا تو $۳۲۳۴ = ۲ \times ۳ \times ۷^2 \times ۱۱$
پس مجذور کامل کے حاصل کرنے کے واسطے ۲ × ۳ × ۱۱ مین ضرب دینا چاہیے
(۳) ۱۸۴۵ کو متباین اجزا ضربی مین تحلیل کیا تو $۱۸۴۵ = ۲ \times ۵ \times ۴۱$ پس مکعب کامل حاصل کرنیکو

واسطے $۳ \times ۵^{۲} \times ۱۴^{۲}$ مین ضرب دینا چاہیئے

(۴) $۶۴۸۰ = ۲^{۴} \times ۳^{۴} \times ۵$ پس $۲^{۲} \times ۳^{۲} \times ۵^{۲}$ مین ضرب دینا چاہیے

(۵) $۱۳۱۶۸ = ۲^{۴} \times ۸۲۳$ اور ۸۲۳ ایک عدد اولی ہے اسکو $۲^{۲} \times (۸۲۳)^{۲}$ مین ضرب دو

(۶) طاق مجذور کسے طاق عدد کا مثلاً ۲ن + ۱ کا مجذور ہوگا اور جفت مجذور کسی جفت عدد مثلاً ۲م کا مجذور ہوگا پس $(۲ن + ۱)^{۲} + ۴م^{۲}$ ایک مجذور ہے اور وہ مجذور کسی طاق عدد کا ہونا چاہیے مثلاً وہ $(۲ع + ۱)^{۲}$ ہو اس سے معلوم ہوا کہ $ن(ن + ۱) + م^{۲} = ع(ع + ۱)$ لیکن ن(ن + ۱) ایک جفت عدد ہے تو ع(ع + ۱) بھی جفت عدد ہوگا اس سے معلوم ہوا کہ $م^{۲}$ بھی جفت عدد ہے اسواسطے م بھی جفت ہے اوسکو = ۲ق فرض کرو
اسواسطے $(۲م)^{۲} = (۴ق)^{۲} = ۱۶ق^{۲}$

(۷) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۴} - ۱$ اضعاف ۵ کے ہین اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو پس $ع^{۲} - ۱$ یا $ع^{۲} + ۱$ اضعاف ۵ کا ہے اگر ۵ کا اضعاف ع نہ ہو یعنی اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو
تو $ع^{۲} = ۵ن \pm ۱$

(۸) فرمیٹ کے مسئلہ کے موافق $ع^{۶} - ۱$ اضعاف ۷ کا ہے اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو پس ہر ایک $ع^{۳} - ۱$ اور $ع^{۳} + ۱$ مین سے کوئی اضعاف ۷ کا ہے اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو
پس اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو تو $ع^{۳} = ۷ن \pm ۱$

(۹) اگر ایک عدد مجذور اور مکعب دونو ہون تو اوسکی قوت کا نزول پورا نکلے گا اور موجب مسئلہ فرمیٹ کے $ع^{۶} - ۱$ اضعاف ۷ کے ہین اگر ع اضعاف ۷ کا نہ ہو

(۱۰) اگر ایک عدد ۳ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اور اس سبب اوسکا مجذور بھی تقسیم ہوتا ہے اور اسیواسطے اوسکی صورت ۳ن − ۱ نہوگی۔ اگر ایک عدد ۳ پر نہ تقسیم ہوتا ہو تو اوسکی صورت ۳م ± ۱ کی سی ہوگی اور اوسکا مجذور $۹م^{۲} \pm ۶م + ۱$ ہے اور اوسکی صورت ۳ن + ۱ کے

(۱۱) فرض کرو $\frac{م(م + ۱)}{۲}$ مثلثی عدد ہے اب اگر م اور م + ۱ مین سے کوئی ۳ پر تقسیم

ہوتا ہی تو اوسکی صورت ۳ن کے ہی اور اگر م اور م+۱ مین سے کوئی ۳ پر نہین تقسیم ہوتا
تو اوسکی صورت ۳ع+۱ کی ہو اور مثلثی عدد کے صورت ۹ع(ع+۱)/۲ +۱ ہوگی اور اسکی
صورت ۳ن+۱ کے سے ہے

(۱۳) اگر ا متباین ب سے ہے اور ا-ب ایک طاق عدد ہی تو ا+ب متباین ا-ب
سے ہوگا اسواسطے کہ ا-ب = ا+ب-۲ب پس اگر کوئی عدد ا-ب اور ا+ب
کو تقسیم کرتا ہی تو وہ ۲ب کو بہی تقسیم کریگا اور اسلئی ب کو بہی کیونکہ ا-ب طاق ہے
اور چونکہ ا-ب = ۲ا-(ا-ب) پس اگر کوئی عدد دونو ا-ب اور
ا+ب کو تقسیم کرتا ہے تو وہ ا کو بہی تقسیم کریگا پس جو عدد ا+ب اور ا-ب کو
تقسیم کرتا ہے وہ ا اور ب کو بہی تقسیم کرتا ہے لیکن امتباین ب سے ہی اسلئی
مقسوم علیہ نہین ہو سکتا اب صفحہ ۲۰۴ دیکہو

(۱۴) فرض کرو کہ ا اور ب اور ا+ب تین اعداد مطلوب ہون تو یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ
۲[ا۴+ب۴+(ا+ب)۴] = ۴(ا۲+اب+ب۲)۲ اسے دعوی ثابت ہے

(۱۵) لان-۱ = (لا-۱+۱)ن-۱ = (لا-۱)ن + ن(لا-۱)ن-۱ ...
پس باین طرح کی ہر ایک رقم سوا اول رقم کے ن پر پوری تقسیم ہو گی پس ثابت ہوتا ہے کہ
لان-۱ کو ن پر تقسیم کرنے سے باقی بچیگی وہ وہی ہو گی جو (لا-۱)ن کو ن پر تقسیم کرنے سے بچیگی

(۱۶) بشرط امکان فرض کرو کہ م۲ اور ن۲ کو جب ۲ع+۱ پر تقسیم کرتی ہین تو ایک ہی باقی رہتی ہے
اور اسمین م ن ن م ۲ع سی بڑا نہین ہے اور فرض کرو کہ م اور ن خارج قسمت ہین تو
م۲ = م(۲ع+۱) + ر اور ن۲ = ن(۲ع+۱) + ر اسواسطے م۲-ن۲ = (م-ن)(۲ع+۱)
اسواسطے ۲ع+۱ تقسیم (م-ن)(م+ن) کو کرتا ہی لیکن یہہ نا ممکن ہی کیونکہ ۲ع+۱ عدد اول ہے
اور م+ن سے بڑا ہے

(۱۷) فرض کرو کہ قوت کا قوت نما ۲ع ہی اور طاق عدد کو ع قوت مین اٹہاؤ تو وہ طاق عدد ہوگا

اوسکو ۲م + ۱ سے تعبیر کرو تو اب ہم کو اسکا مربع کرنا چاہیے (۲م + ۱)^۲ = ۴م (م + ۱) + ۱

اور اسکے ۸ن + ۱ کی صورت ہے اسلئے کہ م (م + ۱) جفت عدد ہے

(۱۸) ۷^ع = (۸ - ۱)^ع = ۸^ع - ع ۸^(ع-۱) + ۰۰۰ + (-۱)^ع اسمین سے ہر رقم ۸ پر پورے تقسیم ہوتے ہیں مگر اخر رقم اگر ع طاق ہے تو اخر رقم -۱ ہوگی پس اگر ع طاق ہے تو اوسکی صورت ۸ن - ۱ کی سی ہوگی

(۲۱) ا لا - ۲ لا^۲ = ا^۲/۸ - ۲ (لا - ا/۴)^۲ پس بڑی سی بڑی قیمت جب حاصل ہوگی کہ (لا - ا/۴)^۲ چھوٹے سے چھوٹا بنایا جاے اگر ا = ۴م تو لا = م ہوسکتا ہے اور ما حصل ا^۲/۸ ہوگا

اور اگر ا = ۴م + ۱ تو لا = م ہوسکتا ہے اور ماحصل ا^۲/۸ - ۱/۸ ہوسکتا ہے

اور اگر ا = ۴م + ۲ تو لا = م کے ہوسکتا ہے اور ماحصل ا^۲/۸ - ۱/۲ ہوگا اگر ا = ۴م + ۳ تو لا = م + ۱ ہوسکتا ہے اور ماحصل ا^۲/۸ - ۱/۸ ہوسکتا ہے

(۲۲) ن (ن + ۱) (۲ن + ۱) = (ن - ۱) (ن + ۱) + ن (ن + ۱) (ن + ۲) اب دفعہ ۱۷ کام مین لاؤ

(۲۳) تین متصل کے اعداد ن - ۱ اور ن اور ن + ۱ مین سے ضرور ہے کہ ایک ۳ پر تقسیم ہو اور چونکہ (ن - ۱) اور ن + ۱ دو نو جفت ہین تو ایک ۲ پر اور دوسرا ۴ پر پورا تقسیم ہوگا پس (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا ۲۴ پر تقسیم ہوگا

(۲۴) چونکہ ن پورا ۳ پر تقسیم ہوتا تو ۳م ± ۱ مین سے کسی ایک صورت کا ہوگا اور م جفت ہے کیونکہ ن طاق ہے تو ن^۲ + ۵ = ۹م^۲ ± ۶م + ۶ اور یہ ۶ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۵) ن^۴ - ۱ پورا بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ۵ پر تقسیم ہوتا ہے اور نیز ن^۴ - ۱ = (ن - ۱) (ن + ۱) (ن^۲ + ۱) اب (ن - ۱) (ن + ۱) پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے اور ن^۲ + ۱ پورا ۲ پر تقسیم ہوتا ہے اور (ن - ۱) (ن + ۱) پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے کیونکہ (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے اور ن ایک عدد اولی ہے جو ۳ کی برابر نہین ہے پس ن^۴ - ۱ پورا تقسیم ۵ × ۸ × ۲ × ۳ پر ہوتا ہے

(۲۶) $\frac{م^۵ - ۵م^۳ + ۴م}{۱۲۰} = \frac{(م - ۲) (م - ۱) م (م + ۱) (م + ۲)}{۱۲۰}$ اب دفعہ ۱۰ کے کام مین لاؤ

(۲۷) فرمیٹ کے مسئلہ کے اثبات مین جو کچھ لکھا ہے اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن (ن^۶ - ۱) پورا ۶ پر تقسیم ہوتا ہے
اور ن^۲ - ۱ پور ان^۲ - ۱ پر بہی تقسیم ہوتا ہے پس ن (ن^۶ - ۱) پورا (ن - ۱) ن (ن + ۱) پر تقسیم ہوتا ہے
اور اسی واسطے ۶ پر (دفعہ ۱۰۷ دیکہو) پس اسی ثابت ہوا کہ ن (ن^۶ - ۱) پورا تقسیم ۷×۶ یعنی ۴۲ پر ہوتا ہے

(۲۸) لا^ن - لا = لا (لا^(ن-۱) - ۱) فرمیٹ کے مسئلہ کا جو اثبات لکھا ہے اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہہ اضعاف ن کا ہے
اسے معلوم ہوا کہ لا^ن اور لا جب ن پر تقسیم ہون تو ایک ہی باقی رہی

(۲۹) بموجب مسئلہ فرمیٹ ع^(ن-۱) = ۱ + ع ن طرفین مساوات کا صعود ن قوت کا لو تو
ع^م = (۱ + ع ن)^ن اسی واسطے ع^م - ۱ = ن (ع ن) + ن(ن-۱)/۲ (ع ن)^۲ + ...
اب ہر رقم بائین طرف ن^۲ پر پوری تقسیم ہوتی ہے

(۳۰) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ن^۶ - ۱ کو ۷ پورا تقسیم کرتا ہے اور نیز ن^۶ - ۱ = (ن^۳ + ۱) (ن^۳ - ۱)
یہہ دونو جزضربی جفت ہین اسلئی ایک انمین سے ۲ اور دوسرا ۴ پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۱) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^(ن-۱) - ۱ پورا ن پر تقسیم ہوتا ہے اور چونکہ ن ایک عدد اولی ہے اور ۲ سے بڑا ہے تو وہ طاق عدد ہے فرض کرو کہ ن = ۲م + ۱ تو ع^(ن-۱) - ۱ = (ع^م + ۱) (ع^م - ۱)
یہہ دونو جزضربی جفت ہین اسلئی ایک اونمین سے ۲ پر اور دوسرا ۴ پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۲) ع^ن - ع = ع (ع^(ن-۱) - ۱) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے دوسرا جزضربی ن پر پورا تقسیم ہوتا ہے
اگر ع جفت ہے تو اول جزضربی اور اگر طاق ہے تو دوسرا جزضربی پورا ۲ پر تقسیم ہوتا ہے
اگر ع اضعاف ۳ کا ہے تو اول جزضربی ۳ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے
اگر ع اضعاف ۳ کا ہے تو اوسکی صورت ۳م ± ۱ مین سی کوئی نہ کوئی ہوگی اور دونو صورتون مین ع^(ن-۱) - ۱ پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے اسے معلوم ہوا کہ حاصل ضرب ۶ ن پر تقسیم ہوتا ہے ن جو ایک جزضربی ع^(ن-۱) - ۱ کا ہوتا ہے وہ ۲ یا ۳ کے ساتھہ تطبیق نہین پاتا کیونکہ ن بڑا ۳ سے ہے

(۳۳) بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^(ن-۱) - ۱ پورا تقسیم ن پر ہوتا ہے اور چونکہ ن - ۱ جفت عدد ہے اسلئے

ع^ن-۱ - ۱ پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے ۳ مثال دیکھو اور چونکہ ع ایک عدد اوسطے بڑا ۳ سے ہے
تو اوسکی صورت ۳ م ± ا کی ہوگی اور ع^ن-۱ - ۱ پورا ۳ پر تقسیم ہوتا ہے

(۳۴) فرضکرو کہ سلسلہ کے کسی رقم کو لا تعبیر کرتی ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے
لا^ن = لا + ایک ضعاف ن جمع کرنے کے یہ معلوم ہوگا کہ سلسلہ معلوم برابر ن^ن (ن+۱)/۲ جسمیں بعض ضعاف
اور مزید ہیں اور ن (ن+۱)/۲ بھی ن کا ضعاف ہے اگر ن بڑا ۲ سے ہو

(۳۵) فرضکرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ۱۱ کا ضعاف ع ہے تو ع^۱۱ بھی اوسکا ضعاف ہے
اگر ۱۱ کا ضعاف ع نہیں ہے تو بحکم مسئلہ فرمیٹ کے ع^۱۰ - ۱ ضعاف ۱۱ کا ہے

(۳۶) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ۱۳ کا ضعاف ع ہے تو ع^۱۳ بھی اوسکا ضعاف ہے
اور اگر ۱۳ کا ضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^۱۲ - ۱ ضعاف ۱۳ کا ہے

(۳۷) فرضکرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے پس اگر ۱۹ کا ضعاف ع ہے تو ع^۱۹ بھی اوسکا ضعاف ہے
اور اگر ۱۹ کا ضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^۱۸ - ۱ ضعاف ۱۹ کا ہے
اسیواسطے ع^۹ + ۱ اور ع^۹ - ۱ مین کوئی نہ کوئی ضعاف ۱۹ کا ہے

(۳۸) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے پس اگر ۲۳ کا ضعاف ع ہے تو ع^۲۳ اوسکا ضعاف ہے
اور اگر ۲۳ کا ضعاف ع نہیں ہے تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے ع^۲۲ - ۱ ضعاف ۲۳ کا ہے
اسواسطے ع^۱۱ + ۱ یا ع^۱۱ - ۱ مین سے کوئی ضعاف ۲۳ کا ہے

(۳۹) فرضکرو کہ ع کسی عدد کو تعبیر کرتا ہے اگر ۵ کا ضعاف ع ہے تو ع کا مجذور یا کوئی اوسکے
بڑی قوت ۲۵ کا ضعاف ہوگا اور اگر ۵ کا اضعاف ع ہو تو بموجب مسئلہ فرمیٹ کے
ع^۴ = ۱ + ۵ ف اسیواسطے ع^۲۰ = (۱ + ۵ ف)^۵ = ۱ + ۵ (۵ ف) + ...
اور اسکی صورت ۱ + ۲۵ ن کی ہے

(۴۰) ۱۴۰ = ۲^۲ × ۵ × ۷ اور ۲^۲ × ۵ × ۷ (۱ - ۱/۲) (۱ - ۱/۵) (۱ - ۱/۷) = ۴۸

(۴۱) ۳۶۰ = ۲^۳ × ۳^۲ × ۵ اور ۲^۳ × ۳^۲ × ۵ (۱ - ۱/۲) (۱ - ۱/۳) (۱ - ۱/۵) = ۹۶

(۴۲) ۱۰۰۰ = ۲^۳ × ۵^۳ اور ۲^۳ ۵^۳ (۱ − ۱/۲) (۱ − ۱/۵) = ۴۰۰

(۴۳) ۳^۴ × ۷^۲ × ۱۱ (۱ − ۱/۳) (۱ − ۱/۷) (۱ − ۱/۱۱) = ۲۲۶۸۰

(۴۴) ۲^ن × ۵^ن (۱ − ۱/۲) (۱ − ۱/۵) = ۲^{ن+۱} ۵^{ن−۱}

(۴۵) ۱۴۰ = ۲^۲ × ۵ × ۷ اور (۱+۲) (۱+۱) (۱+۱) = ۱۲

(۴۶) ۱۸۴۵ = ۳^۲ × ۵ × ۴۱ اور (۱+۲) (۱+۱) (۱+۱) = ۱۲

(۴۷) ۹۱ = ۲^۶ × ۳^۴ × ۵ × ۷ اور (۱+۶) (۱+۴) (۱+۱) (۱+۱) = ۱۴۰

(۲^۷ − ۱) (۳^۵ − ۱) (۵^۲ − ۱) (۷^۲ − ۱) / (۲ − ۱) (۳ − ۱) (۵ − ۱) (۷ − ۱) = ۱۴۸۱۰۴۰

(۴۸) بموجب دفعہ ۲۳۷ اور مثال ۴۶ کے عدد = ۱۲/۲ = ۶

(۴۹) ۱۰۰۸۰۰ = ۲^۶ × ۳^۲ × ۵^۲ × ۷ اس عدد کے مقسوم علیہ
= (۱+۶) (۱+۲) (۱+۲) (۱+۱) = ۱۲۶

(۵۰) چار قائموں میں ۳۶۰ درجے ہوتے ہیں اور ۳۶۰ = ۲^۳ × ۳^۲ × ۵ اور
مقسوم علیہوں کی تعداد = (۱+۳) (۱+۲) (۱+۱) = ۲۴
اور چار قائموں میں فرانسیسی درجے ۴۰۰ ہوتے ہیں اور ۴۰۰ = ۲^۴ × ۵^۲
مقسوم علیہوں کی تعداد = (۱+۴) (۱+۲) = ۱۵

(۵۱) ۱۰^ن = ۲^ن × ۵^ن اور مساوات لا ر = ۱۰^ن اب لا کی قیمت ۱۰^ن کے کسی مقسوم علیہ کی برابر رکھہ سکتی ہیں اور اوسی ر کی قیمت نکال سکتے ہیں پس بموجب دفعہ ۲۲۷ کی حلوں کی تعداد =
(ن+۱) (ن+۱)

(۵۲) فرض کرو کہ ع = ا^ف ب^ق ج^ل ... جنمیں ا و ب و ج اعداد اولے ہیں اب ہم یہہ دریافت کرینگے کہ ف میں اسکے کونسے قوت واقع ہوگی فرض کرو کہ ب^ق ج^ل ... کی مقسوم علیہوں کی تعداد کو ص تعبیر کرتا ہے تو ظاہر ہے کہ ع کے ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا نہیں اور ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا واقع ہوتا ہے اور ص مقسوم علیہ ایسے ہیں جنمیں ا^۲ واقع ہوتا ہے

اور علےٰ ہذا القیاس حصہ مقسوم علیہ وہ ہونگے جنمین اٰ واقع ہوتا ہے اسسے ثابت ہوا کہ
اٰ کا قوت نما ف مین حصہ (۱+۲+۳+ ۰۰ + مہ) یعنی حصہ مہ(مہ+۱)/۲ یعنی ل مہ/۲ ہے
اور اسی طرح سے پ کا قوت نما ل ن/۲ ہے اور علیٰ ہذا القیاس پس ف = عٰ^ل ن اور ل جفت ہے
الا اوس صورت مین جسمین عہ و ق ور. سب جفت ہین پس عٰ ہمیشہ منطق ہے اسلیے
عٰ ل ایک مجذور کامل ہے

(۵۳) فرض کرو کہ اٰ عٰ بٰ ق حٰ ر ... وہ عدد ہو جسکی ۳۰ مقسوم علیہ ہین اور اسمین ا و ب و ح ۰۰
اعداد اولی ہین تو (ع+۱) (ق+۱) (ر+۱) = ۳۰ اب اس مساوات کے حل مختلف ہوسکتی ہین
ع = ۴ اور ق = ۲ اور ع = ۵ اور ق = ۴ اور ر = ۰ پس تین سے زیادہ اجزار
ضربی متباین نہین ہوسکتی گو اوسی کم ہوسکتی ہین اب ا = ۲ اور ب = ۳
اور ح = ۵ لیتے ہین کیونکہ یہی سب سے اونے درجہ کے اعداد اولے ہین تو امتحان کرنے سے
یہہ معلوم ہوگا کہ ۲^۴ × ۳^۲ × ۵ چھوٹے سے چھوٹا عدد ہے جسکے ۳۰ مقسوم علیہ ہین

(۵۴) یہہ بہی ۵۳ مثال کی طرح آسانی سے حل ہوتی ہے ۶۴ = ۲^۶ اسسے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ
وہ عدد جو ۶۴ مقسوم علیہ رکہتا ہے ۶ سے زیادہ اجزار ضربی متباین نہین رکہہ سکتا گو اوس سے کم رکہتا ہو
وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد جو چھہ جز ضربی متباین اور ۶۴ مقسوم علیہ رکہتا ہے ۲×۳×۵×۷×۱۱×۱۳
ہے اور وہ سب سے چھوٹا عدد جو ۵ جز ضربی متباین اور ۶۴ مقسوم علیہ رکہتا ہے ۲^۳×۳×۵×۷×۱۱
ہے اور یہہ پہلے عدد سے چھوٹا ہے اب چار متباین اجزار ضربی تو ۲^۳×۳×۵×۷
اور ۲^۳×۳^۳×۵×۷ مین سے کوئی منتخب کرنا چاہیے اور اگر ہم تین متباین اجزا ضربی لیں تو
۲^۳×۳^۳×۵ اور ۲^۳×۳^۳×۵^۳ ان چار عددون مین سے سب سے چھوٹا ۲^۳×۳^۳×۵×۷ ہے اور
اور یہہ چھوٹا ۲^۳×۳×۵×۷×۱۱ سے ہے اب ہم یہہ ثابت کرسکتے ہین کہ ۲^۳×۳^۳×۵×۷
چھوٹا اوس عدد سے ہے جو ۶۴ مقسوم علیہ اور دو مختلف متباین جز ضربی یا صرف ایک جز
ضربی اولے رکہتا ہے

(۵۵) فرض کرو کہ جب ع ا کو ب پر تقسیم کرین تو خارج قسمت ن نکلے اور باقی ر رہے پس ع ا/ب = ن + ر/ب اور جب (ب − ع) ا تقسیم ب پر کیا جاے تو خارج قسمت نَ نکلے اور باقی رَ رہی پس (ب − ع) ا/ب = نَ + رَ/ب اسی معلوم ہوا کہ جمع کرنے سے ا = ن + نَ + (ر + رَ)/ب اب نہ ا اور نہ رَ صفر ہو سکتی ہین یا اسواسطے ا اور ب متباین ہین اسواسطے ر + رَ برابر ب کے ہوا اور ن + نَ برابر ا − ۱ کے

(۵۶) ہر یک عدد ان صورتون مین سے ایک نہ ایک ہوگا

ع ن د ع ن + ۱ د ع ن + ۲ . . . ع ن + ۲ . . . ع ن + (ن − ۱)

(ع ن + ۱)۲ اور [ع ن + (ن − ۱)]۲ کو جب ن پر تقسیم کرینگے تو ایک ہی باقی رہیگی اسواسطے (ع ن + ۱)۲ = ن (ع۲ ن + ۲ ع) + ۱ اور [ع ن + (ن − ۱)]۲ = ن [(ع + ۱)۲ ن − ۲ (ع + ۱) ۲] + ۱

اور ایسی ہی (ع ن + ۲)۲ اور [ع ن + (ن − ۲)]۲ کو جب ن پر تقسیم کرینگے تو ایک ہی باقی رہیگی اور علے ہذالقیاس پس ن/۲ سے زاید مختلف باقیات نہین رکھہ سکتی

(۵۷) ۲۲ × ۵ × ۷ × لا = م۳ پس تا کہ م۳ ایک مکعب کامل ہو تو لا کی یہہ صورت ہونی چاہیے ۲ × ۵۲ × ۷۲ × ط۳ تو و = ۲ × ۵ × ۷ × ط

(۵۸) ہر یک عدد ان صورتون مین سے کوئی نہ کوئی ایک ہوگا

ن ر و ن ر + ۱ اور ن ر + ۲ . . ن ر + (ر − ۱)

تو (ن ر)۲ کا . پر ختم ہوگا اور (ن + ۱)۲ اور (ن ر + ۲)۲ و . . کا خاتمہ ۱۲ و ۲۲ . . کے ہندسون پر ہوگا پس موافق مثال ۱۶ کے یہان (ر − ۱)/۲ مختلف ہندسے بغیر صفر کے شمار کرنے کے ہونگے اور صفر کو بھی شمار کرلین تو (ر + ۱)/۲ ہندسے کل ہونگے

(۵۹) تمثیلاً فرض کرو کہ ع = ۴ اور ن = ا۲ + ب۲ + ج۲ + د۲ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ۴ ن کی تحلیل ۴ مجذورون مین کرین اور درحقیقت یہہ امر ہم کو حاصل ہے کہ

$\text{۶۹ن} = (ا+ب)^۲ + (ا-ب)^۲ + (ا+ح)^۲ + (ا-ح)^۲ + (ا+د)^۲ + (ا-د)^۲$
$+ (ب+ح)^۲ + (ب-ح)^۲ + (ب+د)^۲ + (ب-د)^۲ + (ح+د)^۲ + (ح-د)^۲$

اور خواہ ع کی کچھ ہی قیمت فرض کریں اس حاصل کو ثابت کر سکتی ہیں

(۶۰) $۲^{۴ن} + ۱۵ن - ۱ = ۱۵ن - ۱ + (۱+۳)^ن = ۱۵ن - ۱ + ۱ + ۳ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲}۳^۲ + \ldots$
$= ۱۸ن + \frac{ن(ن-۱)}{۲}۳^۲ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor۳}۳^۳ + \ldots$

ہر ایک رقم ۹ پر پوری تقسیم ہوتی ہے

(۶۱) (لا+۱) (لا+۲) ... (لا+ن) کو ضرب باہم دو تو بموجب دفعہ ۵۰ کے حاصل ضرب $لا^ن + ع_۱ لا^{ن-۱} + ع_۲ لا^{ن-۲} + \ldots + ع_ن$ ہوگا لا = ۱ کے رکھو تو جملہ کے یہہ صورت ہو جائیگے $\lfloor ن+۱$ یہہ ن پر تقسیم ہوتا ہے اور جب $ع_ن$ کو جو برابر $\lfloor ن$ کے ہے تفریق کریں تو باقی بھی ن پر پوری تقسیم ہوگی

(۶۲) فرض کرو کہ کسی عدد کو ع تعبیر کرتا ہے اگر ع اضعاف ۵ کا ہو تو ع کا مکعب یا اوسکی کوئی ایسی بڑی قوت اضعاف ۱۲۵ کا ہوگا اور اگر ع اضعاف ۵ کا نہ ہو تو بموجب مسئلہ فرما کے
$ع^۴ = ۱ + ۵ف$ اسواسطے $ع^{۱۰۰} = (۱+۵ف)^{۲۵} = ۱ + ۲۵ \times ۵ف + \ldots$
اور اسکی صورت ۱ + ۱۲۵ ن کی ہے

ترپنواں باب

(۱) اول واردات کا احتمال وقوع $\frac{۳}{۵}$ ہے اور دوسرے واردات کا احتمال وقوع $\frac{۳}{۷}$ ہے اسواسطے دونوں کا احتمال وقوع $\frac{۹}{۳۵}$ ہے اور عدم وقوع کے نسبت ۲۷ و ۸ کے نسبت ہے

(۲) دونوں کے مرجانے کا احتمال $\frac{۳}{۱۵} \times \frac{۲}{۳}$ یعنی $\frac{۱۶}{۱۴۵}$ ہے اسواسطے ایک کے زندہ رہنے کا احتمال $\frac{۱۲۹}{۱۴۵}$ ہے

(۳) فرض کرو کہ یہہ خاص آدمی زید اور بکر ہیں تو اس امر کا احتمال کہ بکر زید کی دائیں طرف بیٹھا ہو $\frac{۱}{۲۲}$ ہے اور اس بات کا احتمال کہ بکر زید کی بائیں طرف بیٹھا ہو $\frac{۱}{۲۲}$ ہے اب احتمال اس امر کا کہ زید کی دائیں طرف یا بائیں طرف بکر بیٹھا ہو $\frac{۱}{۱۱}$ ہے پس زید و بکر کے پاس پاس بیٹھنے کی نسبت

مخالف ۱۰ اور ۱ کی نسبت ہوئی

(۴) اس امر کا اتفاق کہ دونو سوال کو حل نہ کر سکیں ۳/۴ × ۵/۶ یعنی ۵/۸ ہے اسلیئے اس امر کا احتمال کہ دونو نہ حل کر سکیں ۳/۸ ہے

(۵) دو سیاہ گولیاں $\frac{4\times5}{1\cdot2}$ طور سے نکل سکتی ہیں اور ایک سرخ گولی ۳ طور سے اسلیئے ۳۰ صورتیں حسن ہیں $\frac{3\times4\times5}{1\cdot2}$ اور کل طور تین تین گولیوں کی نکلنی کی کل ۱۰ گولیوں میں سے $\frac{8\times9\times10}{1\cdot2\cdot3}$ ہیں

اب اول کو دوم پر تقسیم کرو تو ۱/۴ حاصل ہوگا

(۶) اول ہاتھ میں پو کے آنے کا احتمال اور دوسرے ہاتھ میں پو کے نہ آنے کا احتمال ۱/۶ × ۵/۶ یعنی ۵/۳۶ ہے اور اول ہاتھ میں پو کے نہ آنے کا احتمال اور دوسرے ہاتھ میں پو کی آنی کا احتمال بھی ۵/۳۶ ہے پس سارا احتمال ۵/۱۸ ہے

(۷) دونو پانسوں میں پو کے نہ آنے کا احتمال ۲۵/۳۶ ہے اسلیئے نہ آنے کا احتمال ۱ − ۲۵/۳۶ یعنی ۱۱/۳۶ ہے

(۸) چونکہ ۷ = ۶+۱ = ۵+۲ = ۴+۳ = ۳+۴ = ۲+۵ = ۱+۶ پس
۶ صورتیں ستے کے آنے کی ہیں اور گیارہ کے آنے کی صرف دو صورتیں ہیں کیونکہ ۱۱ = ۶+۵ = ۵+۶
پس کل صورتیں اونکے آنے کی ۸ ہیں اور کل صورتیں ۳۶ ہیں اسواسطے اونکے آنی کا احتمال ۸/۳۶ یعنی ۲/۹ ہے
اور نسبت مخالف ۷ اور ۲ کے نسبت ہے

(۹) فرضکرو کہ تھیلی میں ا اشرفیاں تھیں اور اول تھیلی میں ب روپیہ اور دوسرے تھیلی میں ح روپیے تھے
اب کسی ایک تھیلی کے اٹھا لینے کا احتمال ۱/۲ ہے اور اشرفی نکلنی کا احتمال ۱/۲ (ا/(ا+ب) + ا/(ا+ح)) ہے اور
اگر تمام روپیے اشرفیاں ایک ہی تھیلی میں ہوتے تو اشرفی نکلنی کا احتمال ۲ا/(۲ا+ب+ح) ہوتا
اب اگر اول جملہ میں سے دوسرے جملہ کو تفریق کریں اور حاصل کی تحویل کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ
ا(ب − ح)^۲ / ۲(ا+ب)(ا+ح)(۲ا+ب+ح) اسسے معلوم ہوا کہ پہلا جملہ بڑا بہ نسبت دوسرے جملہ کے ہے

(۱۰) اب اسکا احتمال کہ سوہن کے ساتھ سوہن یا رادہا یا کرشن ایک کشتی میں ہو برابر ہے اب اگر
سوہن سوہن کے ساتھ یا رادہا کی ساتھ ہے تو ہاری کا اور اگر کرشن کے ساتھ ہے تو ہارنی جیتنی کا
احتمال برابر ہے اور اسی طرح سوہن اور رادہا اور کرشن کے حالتوں کا امتحان کر سکتے ہیں

(۱۱) دو بانسوں سے چھتیس ۳۶ طرح کے بانسے آسکتی ہیں — اب چھ صورتیں تو ایسی ہیں کہ یا دونوں تین بانسوں کے خانوں ایک سے اولے آئینگی اور دس صورتیں ایسی ہیں کہ ایک بانسے میں ۲ آئیگی اور دوسرے میں نہ آئی تو اس سے معلوم ہوا کہ ۱۶ صورتیں مخالف ہیں تو ۲۰ صورتیں موافق ہونگیں اسلیے احتمال $\frac{20}{36}$ ہے

(۱۲) اب کل صورتیں وہ اجتماع ہیں جو ۳۰ اشیا میں سے چار چار کا لیا جائے اور وہ $\frac{27\times28\times29\times30}{|4}$ ہی اور وہ صورتیں جنمیں مکعب اور ۲ کا باقی ۲۸ ٹکٹوں میں سے کسی زوج کے ساتھ نکل آئی $\frac{27\times28}{|2}$
اب اس عدد کو پہلے عدد پر تقسیم کرو تو احتمالات $\frac{4\times3}{29\times30}$ نکلینگے

(۱۳) اول قمار خانہ میں ہم ۹ چٹھیاں خیال کر سکتے ہیں جنمیں ۶ خالی ہیں تو وہ صورتیں جنمیں تین چٹھیاں نکلیں $\frac{9\times8\times7}{|3}$ یعنی ۸۴ ہیں اور وہ صورتیں جنمیں زید کی مال کی چٹھی نہ نکلیں وہ ہیں جو ۶ خالی چٹھیوں میں تین تین نکالی جائیں یعنی $\frac{4\times5\times6}{|3}$ یعنی ۲۰
تو اسے معلوم ہوا کہ ۶۴ صورتیں ایسی ہیں جنمیں زید کے ایک یا زیادہ مال کی چٹھیاں نکلینگی
پس زید کے مال پانے کا احتمال $\frac{64}{84}$ یعنی $\frac{16}{21}$ ہے ہر یک چٹھی جدا جدا نکالی جاے تو ہم اسطرح عمل کریں کہ اول خالی چٹھی کے نکلنے کا احتمال $\frac{6}{9}$ ہی اب ۸ چٹھیاں باقی رہیں جنمیں سے ۵ خالی ہیں تو دوسرے دفعہ خالی چٹھی نکلنے کا احتمال $\frac{5}{8}$ ہی اور علی ہذا القیاس تیسرے دفعہ خالی چٹھی نکلنے کا احتمال $\frac{4}{7}$ ہے پس سارا احتمال ناکامیابی کے $\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$
یعنی $\frac{5}{21}$ ہے پس زید کے نام ایک یا زیادہ مال کی چٹھی نکلنے کا احتمال $1-\frac{5}{21}$ پس $\frac{16}{21}$ ہے
اور بکر کا احتمال $=\frac{1}{3}=\frac{7}{21}$

(۱۴) اول تھیلی میں سے سفید گولی نکلنے کا احتمال $\frac{3}{7}$ ہی اگر ایک سفید گولی نکل آئی اور وہ دوسرے تھیلی میں ڈالی جائی تو اوسمیں ۴ سفید گولیاں اور ۴ سیاہ گولیاں ہونگیں اور ایک سفید گولی نکلنے کا احتمال $\frac{4}{8}$ ہی اسواسطے دونو دفعہ سفید گولی کے نکلنے کا احتمال $=\frac{3}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{3}{14}$

(۱۵) ہم یہہ چاہتے ہیں چہرہ اوپر ایک دفعہ یا تین دفعہ یا پانچ دفعہ آئے اور یہہ احتمال ہے صورت مفصلہ $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^5$ کے ارقام دوم و چہارم وغیرہ کے مجموعہ کا

احتمال پہر اسیواسطے ۱/۲ [(۱/۲ + ۱/۲)^ن - (۱/۲ - ۱/۲)^ن] یعنے ۱/۲ ہے

(۱۶) اب یہان صورتین ۲^ن ہین اور موافق صورتین ن ہین کیونکہ ان روپیون مین سے ہر ایک کا چہرہ اوپر آسکتا ہے پس احتمال ن/۲^ن ہے

(۱۷) فرضکرو کہ م + ن اشیا مین سے ع + ق چیزون کا اجتماع ا ایک وقت مین ہے اور م اشیا مین سے ع اشیا کا اجتماع ب ایک وقت مین ہے اور ن اشیا مین سے ق اشیا کا اجتماع ح ایک وقت مین ہے

پس کل صورتین تو ا ہین اور موافق صورتین ب ح ہین اسلئے احتمال ب ح/ا ہے

(۱۸) دفعہ ۷۴۰ مین ع = ۱/۳۶ اور ق = ۳۵/۳۶ اور ن = ۱۶ اور ر = ۴

پس یہہ حاصل ہوگا کہ ۱/(۳۶)^۴ [۱ + ۴ × ۳۵ + ۱۵ × (۳۵)^۲] یعنی ۱۸۵۸۶/(۳۶)^۴

(۱۹) دفعہ ۷۴۰ مین ع = ۱/۶ اور ق = ۵/۶ اور ن = ۶ اور ر = ۱

پس یہہ حاصل ہوگا کہ ۱/(۶)^۶ [۱ + ۶ × ۵ + ۱۵ × ۵^۲ + ۲۰ × ۵^۳ + ۱۵ × ۵^۴ + ۶ × ۵^۵] یعنی ۳۱۰۳۱/۶^۶

(۲۰) دفعہ ۷۴۰ مین ع = ۹/۱۰ اور ق = ۱/۱۰ اور ن = ۵ اور ر = ۳

پس ۱/۱۰^۵ [۹^۵ + ۵ × ۹^۴ + ۱۰ × ۹^۳] یعنی ۱۲۳۹۳/۱۲۵۰۰ ہے

(۲۱) یکسان خال نہ آنے کا احتمال (۵/۶)^۳ ہے پس احتمال ایکدفعہ یا زیادہ دفعہ نکلنے کا ۱ - (۵/۶)^۳ ہے

(۲۲) احتمال دو چہکون کے نہ پہینکنے کا (۳۵/۳۶)^۳ ہے پس ایکدفعہ یا زیادہ دفعہ دو چہکون کے آنے کا احتمال ۱ - (۳۵/۳۶)^۳ ہے

(۲۳) دفعہ ۷۴۰ مین ع = ۱/۲ اور ق = ۱/۲ اور ن = ۵ اور ر = ۲ رکہو تو

یہہ حاصل ہوگا کہ ۱/۲^۶ [۱ + ۶ × ۵ + ۶ × ۱۰ + ۶^۲ × ۱۰] یعنے ۲۵۵۱/۲^۶ ہے

اس امر پر بہی خیال کرنا چاہیے کہ چٹہیون کی تعداد اسی بہت سی فرض کی گئی ہے کہ ع علاوہ جب بہی رہتا ہے کہ ایک یا دو چٹہیان نکل لی جائین اس مثال کو مثال ۱۳ سے مقابلہ کرکے دیکہو جسمین دوسرے طریقہ سے زید کے مال پانے کا احتمال نکالا گیا ہے

(۲۴) طاش کے باون ورق ہوتے ہین اونمین سے چار چار لئے جائین تو کل صورتین وہ اجتماع ہوگا جو ۵۲ اشیا مین سے چار چار چیزون کا لیا جاوے ۴۹ × ۵۰ × ۵۱ × ۵۲/۲۴ ہے ان مین سے ۱۳ صورتین موافق مدعا ہین پس

اسواسطے کہ ہر بازی سے ہر یک پتا لیا جا سکتا ہے
پس دوسرے عدد کو پہلے عدد پر تقسیم کرکے احتمال نکالو

(۲۵) کل صورتین $\frac{49\times50\times51\times52}{|\underline{4}}$ ہین اور موافق صورتین انمین سے چار ہین کیونکہ چار ہی بازیان ہین پس ۴ کو صورتون کے کل تعداد پر تقسیم کرو تو احتمال مطلوب حاصل ہوگا

(۲۶) دفعہ ۱۳۱ مین ع = $\frac{2}{3}$ اور ق = $\frac{1}{3}$ اور م = ۴ اور ن = ۱ پس محمد کی چار بازیان جیتنی کا احتمال پانچ مین سے $(\frac{2}{3})^4\left[1+4\times\frac{1}{3}\right]$ یعنی $\frac{112}{243}$ ہے پس سبب مخالف ۱۳۱ و ۱۱۲ ہے

(۲۷) دفعہ ۱۴۰ مین ع = $\frac{2}{5}$ اور ق = $\frac{3}{5}$ اور ن = ۵ اور ر = ۲
پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{1}{5^5}\left[2^5+5\times2^4\times3+10\times2^3\times3^2+10\times2^2\times3^3\right]$
یعنے $\frac{2072}{5^5}$ ہے

(۲۸) تین آدمیون کے نام زید و بکر و عمر رکھو پس اس امر کا احتمال کہ زید سفید گولی نکالیگا $\frac{3}{8}$ ہے اور اوسکے نہ نکالنی کا احتمال $\frac{5}{8}$ ہے پس اب تین سفید گولیان اور چار سیاہ گولیان رہین تو بکر کے سفید گولی نکالنے کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}$ ہے اور زید اور بکر دونوں کے نہ کامیاب ہونے کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}$ ہے اب ۳ سفید گولیان اور ۳ کالی گولیان باقی ہین تو عمر کے سفید گولی نکالنی کا احتمال $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$ ہے پس اگر زید بکر عمر تینون ناکامیاب ہون تو زید پہر گولی نکالیگا اور علے ہذا القیاس اور پس کل احتمال زید کے
$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$ یعنے $\frac{27}{56}$ ہے اور بکر کا احتمال
$\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{3}$ یعنے $\frac{18}{56}$ ہے اور عمر کا احتمال
$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}$ یعنے $\frac{11}{56}$ ہے

(۲۹) اب پچھلی چار بازیون مین تین یا زیادہ بازیون کے جیتنی مین کیا تو وہ چارون بازیان جیتیگا یا پہلے دوسرے تیسرے چوتہی ایک بازی ہاریگا پس ان پانچون صورتون مین یہہ احتمالات ہین
$\frac{2\times2\times2\times2}{3^4}$ اور $\frac{2\times2\times1\times1}{3^4}$ اور $\frac{2\times1\times1\times2}{3^4}$ اور $\frac{1\times1\times2\times2}{3^4}$ و $\frac{1\times2\times2\times2}{3^4}$

اوران کسرون کا مجموعہ $\frac{۳۶}{۸۱}$ یعنے $\frac{۴}{۹}$ ہے

(۳۰) تاکہ روان آدمی پالنسہ پہینکی ضرور ہی کہ ر-۱ آدمی سب ناکامیاب ہوئی ہون پس $(\frac{ن-۱}{ن})^{ر-۱}\frac{۱}{ن}$ احتمال اسکا ہی کہ وہ پہلی دفعہ مین جیتے - اگر وہ ناکامیاب ہو تو اور آدمی بہی ناکامیاب ہونگے اور وہ دوسرے دفعہ پالنسہ پہینکیگا تو اوسکے جیتنی کا احتمال دوسرے دفعہ $(\frac{ن-۱}{ن})^{ع+ر-۱}\frac{۱}{ن}$ ہی اور علی ہذا القیاس پس اوسکا سارا احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ غیر متناہی کی ہے جسکے اول رقم $\frac{۱}{ن}(\frac{ن-۱}{ن})^{ر-۱}$ ہے اور نسبت مشترک $(\frac{ن-۱}{ن})^{ع}$ ہے

(۳۱) خاص پارسل لایا جای اوسکا احتمال $\frac{۲}{۳}$ ہی پس احتمال کہ کتاب مطلوب خاص پارسل سے نکلی $\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۵}$ ہے یعنی $\frac{۲}{۱۵}$ ہے اب دو پارسل اور رہ گئے پس اور پارسلون مین سے پارسل کے آنے کا احتمال $\frac{۱}{۳}$ ہی اور یہہ احتمال کہ کتاب مطلوب اوس مین ہو $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}$ ہی پس ان دو پارسلون مین سے کتاب مطلوب کے نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۳۰}$ یعنی $\frac{۱}{۱۵}$ ہی پس کل احتمال $\frac{۲}{۱۵}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۳}{۱۵}$ ہے

(۳۲) ہم کو اول یہہ دریافت کرنا چاہیے کہ دوسرے تہیلی مین اشرفی کی ہونی کا کیا احتمال ہے جب اول تہیلی مین سے ۹ سکی نکال لی تو یہہ احتمال کہ اشرفی اونہین مین سے نکلیگی $\frac{۹}{۱۰}$ ہے - اگر اشرفی نکلینگی تو دوسرے تہیلی مین ۸ روپی اور اشرفی ہوگی اب ان مین ۹ سکے نکالی تو ۹ صورتین تو ایسی مین کہ اشرفی نکل گئی اور ۱۰ صورتین ایسی ہین کہ اشرفی اوسی مین رہی پس اشرفی کی رہنے کا احتمال $\frac{۱۰}{۱۹}$ ہی پس یہہ احتمال کہ اشرفی دوسری تہیلی مین ہے، $\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۱۹}$ یعنے $\frac{۹}{۱۹}$ ہے - اس سے معلوم ہوا کہ یہہ احتمال کہ اشرفی آخرکار اول تہیلی مین ہوگی $\frac{۱۰}{۱۹}$ ہے

(۳۳) اول تہیلی مین بعد گولی نکالنے کے یہہ چار ترتیبین ہونگی کہ چار سیاہ گولیان ۵ سفید گولیان ۵ سیاہ گولیان ۴ سفید گولیان ۶ سیاہ گولیان ۵ سفید - ۵ سیاہ گولیان ۶ سفید پس اب اس تہیلی مین سے سفید گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۴}\left[\frac{۵}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۱۱}+\frac{۶}{۱۱}\right]$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ ہے اور علی ہذا القیاس دوسرے گولی سی بہی سفید گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہی پس کوئی سی تہیلی ہم اٹھائین سفید گولی نکلنی کا احتمال $\frac{۱}{۲}$ ہے

(۵۲) کل صورتین ن ہین ن/(ا ص) اعداد ہین جو ن سے زائد نہین اور ا ص اونکا جزء ضربی ہے انہین سے اونکو خارج کرنا چاہئیے جنمین ا ص+۱ ایک جزء ضربی اور وہ ن/(ا ص+۱) تعداد مین ہے

پس حسب مدعا صورتین ن/(ا ص) − ن/(ا ص+۱) ہین

(۵۳) فرض کرو کہ زید کے ایک بازی جیتنے کا احتمال لا ہے

تو زید ۲ و ۳ یا ۴ ۔۔۔ بازیون مین دو بازیان جیت سکتا ہے پس لا کے کل

احتمالات لا۲ + (۱ − لا) لا۲ + لا (۱ − لا) لا۲ + (۱ − لا) لا (۱ − لا) لا۲ + ۔۔۔ ہین

مثلاً اگر زید چار بازیون مین جیتا ہے تو وہ اول بازی جیتی اور دوسرا ہاری اور تیسرا اور چوتھی جیتی پس زید کے جیتنے کے احتمالات دو ہندسی سلسلون غیر متناہی سے مرکب ہین ایک سلسلے کی اول رقم لا۲ ہے اور دوسرے کے اول رقم (۱ − لا) لا۲ ہے اور ہر ایک مین لا (۱ − لا) نسبت مشترک ہے

پس (لا۲ + (۱ − لا) لا۲) / (۱ − لا (۱ − لا)) یعنے لا۲ (۲ − لا) / (۱ − لا (۱ − لا)) حاصل ہو گا اب بکر کے جیتنے کے احتمالات لا کی جگہہ ۱ − لا رکھہ کر نکال سکتی ہین اسواسطے بکر کے جیت کا احتمال جو ہے زید کے جیت کے احتمال کو واحد مین سے تفریق کرین پس بکر کے جیت کا احتمال

= (۱ − لا)۲ (۱ + لا) / (۱ − لا (۱ − لا)) اگر لا = ۲/۳ تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ۵/۲۱ بکر کی جیت کا احتمال ہے

تاریخ احتمالات مین اس سوال کے توسیع دیکھو

(۵۴) چار پہلو پانسہ پر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ خال ہونگے ۔ ہشت پہلو پانسہ پر خال ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ ہونگے اب کل صورتین ۳۲ ہین اب انمین سے ۳ حسب مدعا وہ صورتین ہین جنمین چار پہلو پانسہ کی ۱ آئی اور ۴ حسب مدعا وہ صورتین ہین جنمین چار پہلو میں دو آئین اور علی ہذا القیاس پس کل صورتین حسب مدعا ۳ + ۴ + ۵ + ۶ یعنی ۱۸ ہوئین

(۵۵) تمام واقعات کے نہ واقع ہونے کا احتمال (۱ − ع۱) (۱ − ع۲) (۱ − ع۳) ہے اسکو ایک مین سے تفریق کرو تو ہم کو ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال معلوم ہوگا

دو واقعہ کم از کم واقع ہون تو اونکی صورتین یہہ ہین کہ تینون واقعے وقوع مین آئین ۔ یا پہلا و دوسرا واقعہ

واقع ہو یا دوسرا یا تیسرا ایسی احتمال $ع_1 ع_2 ع_3 + (1-ع_1) ع_2 ع_3 + (1-ع_2) ع_1 ع_3 + (1-ع_3) ع_1 ع_2$

(۵۶) ایک ہی دفعہ مین ۷ کے آنے کا احتمال $\frac{6}{36}$ یعنی $\frac{1}{6}$ ہے مثال ۲ دیکھو اسلیئے احتمال اس امر کا کہ زید اول دس پھینکی $\frac{1}{6}$ ہے اب اگر زید و بکر و عمر تینوں دس پھینکیں تو زید کی دوبارہ پھینکنے کی آئین گے پس دوبارہ جیتنی کا احتمال $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$ پس یہ معلوم ہوا کہ زید کی جیتنی کا احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی اول رقم $\frac{1}{6}$ ہے اور نسبت مشترک $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ہے اور اسی طرح بکر و عمر کے جیتنے کے احتمالات سلسلے ہندسیہ ہین جنکی نسبت مشترک $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ہے اور اول رقم $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ اور $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$ ہے

(۵۷) کسی خاص رتبہ کے ہندسون پر اول خیال کرو مثلاً ساتوین مرتبے کے ہندسون پر لو اوپر کا ہندسہ ۰ یا ۱ یا ۲ ... یا ۹ ہو سکتا ہے اور علی ہذا القیاس ایسی ہی اوسکے نیچے ہندسہ ہو سکتی ہین پس کل ۱۰۰ صورتین ہین اب ہمین دیکھنی چاہیی کہ ہمارے حسب مدعا کتنی ہین اگر اوپر کا ہندسہ صفر ہو تو صرف ایک صورت حسب مدعا ہوگی یعنی جسمین نیچے بھی اوسکی صفر ہو اور اگر اوپر کا ہندسہ ۱ ہو تو صرف دو صورتین حسب مدعا ہونگین یعنی جنمین نیچے ۰ اور ۱ ہوگا اور علی ہذا القیاس حسب مدعا صورتون کی تعداد $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10$ یعنی ۵۵ ہوگی پس یہ احتمال کہ اوپر کا ہندسہ نیچے کے ہندسے سے بڑا نہ ہوگا $\frac{55}{100}$ ہے اور یہ احتمال کہ ایسا ساتون مرتبون مین نہ ہوگا $\left(\frac{55}{100}\right)^7$ ہے

(۵۸) ایک ہی دفعہ ۶ اور ۸ دو پانسون سے پھینکنے کے احتمالات $\frac{5}{36}$ اور $\frac{6}{36}$ ہین مثال ۸ دیکھو پس زید کے اول ہی دفعہ مین چھ کے پھینکنے کا احتمال $\frac{5}{36}$ ہے اب اگر زید اور بکر متواتر ناکامیاب ہوں تو زید دوبارہ پانسہ پھینکیگا اور اوسکی دوبارہ جیتنی کا احتمال $\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36}$ ہے اور علی ہذا القیاس پس زید کے جیتنی کا کل احتمال ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی اول $\frac{5}{36}$ ہے اور نسبت مشترک $\frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6}$ ہے اور ایسی ہی بکر کے جیتنی کا احتمال ایک سلسلہ جسکی نسبت مشترک وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی اور اول رقم $\frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$ ہے

(۵۹) اب وہ کیا دو سورن نکالے گا یا ایک سورن ایک شلنگ یا دو نو شلنگ

اب انکے احتمالات $\frac{۲۵}{۱۴۴}$ و $\frac{۱۱}{۷۲}$ و $\frac{۳۵}{۱۴۴}$ ہین پس روپیون کی توقع

$\frac{۲۵}{۱۴۴} \times ۴۰ + \frac{۱۱}{۷۲} \times ۲۱ + \frac{۳۵}{۱۴۴} \times ۲$ یعنی ۱۲ ہی یا اسطرح کہ جب وہ دو سکی نکالے تو اونمین سے کسی خاص سکے کا نکالنے کا احتمال $\frac{۱}{۴}$ ہے اسلئے

اوسکی توقع چار سورن مین سے ہر یک کے $\frac{۱}{۴}$ ہی اور ایسی ہی چار شلنگ مین ہر شلنگ کے توقع $\frac{۱}{۴}$ ہے پس اوسکی توقع ایک سورن اور ایک شلنگ کی ہے

(۶۰) یہہ احتمال کہ کوئی خاص سکہ نکلی $\frac{۱}{۶}$ ہی پس ۹ اشرفی مین سے ہر یک کے لئے توقع $\frac{۱}{۶}$ ہی اور ۹ روپیون مین سے ہر یک کی لئے توقع $\frac{۱}{۶}$ ہے اور ۱۹ اٹھنیون مین سے ہر یک کی توقع $\frac{۱}{۶}$ ہی پس کل توقع مجموعہ ایک اشرفی اور روپیہ اور اٹھنی کا ہے

(۶۱) اب کل جہاز ۳۶ ہین اب انکی اجتماع دو دو کے $\frac{۳۵ \times ۳۶}{۲ \times ۱}$ ہین یعنی ۱۸×۱۵ پس یہہ احتمال کہ جو دو جہاز اول اون مین ایک روسی اور دوسرا فرانسیسی ہو $\frac{۱۲ \times ۱۰}{۱۵ \times ۱۸}$ ہے

پس روپیون کی توقع $\frac{۱۲ \times ۱۰}{۳۵ \times ۱۸} \times ۲۱۰۰$ یعنے ۴۰۰ ہے

(۶۲) ۵۹ اور ۶۰ مثال کی طرح توقع شلنگون کی $\frac{۳}{۹}$ (۶۳ + ۴۰ + ۴) یعنی $\frac{۱۰۷}{۳}$ یعنی ۳۵$\frac{۲}{۳}$ ہی

(۶۳) روپیون کی توقع $\frac{۱}{۱۰۰}$ [۴ × ۱۰۰ + ۱۰ × ۵۰ + ۲۰ × ۵]

یعنی ۱۰۰۰ × $\frac{۱}{۱۰۰}$ یعنے ۱۰

(۶۴) فرض کرو کہ ہر سکہ کی قیمت لا شلنگ ہی تو شلنگون مین توقع $\frac{۳}{۹}$ (۱۰۰ + ۴ + لا)

اور یہہ برابر ہے ۳۴ کے تو لا = ۲

(۶۵) فرض کرو کہ سونے کا ہر سکہ لا شلنگ کا تھا اور چاندی کا ہر یک سکہ ی شلنگ کا تو شلنگ مین توقع $\frac{۴}{۸}$ [لا + ۳ ی + ۴] اور یہہ برابر ۱۵ کے ہے اسواسطے لا + ۳ ی = ۲۶ پس جو حل اون مین داخل ہو سکتا ہے لا = ۲۰ اور ی = ۲ ہے

(۶۶) مثال ۵۸ کی طرح زید اور بکر کے احتمالات جیتنے کے غیر متناہی سلسلے ہین جنکی نسبت مشترک $\frac{۱}{۴}$ ہی اور زید کے احتمال کے اول رقم $\frac{۱}{۲}$ اور بکر کے احتمال کے اول رقم

۱/۴ ہے پس زید کا احتمال ۳/۴ اور بکر کا احتمال ۱/۴ ہے
فرضکرو کہ ہر ایک نے ۱ روپیہ دیا اور زید بکر کو لا روپیہ اول پھیکنی کے واسطے دیتا ہے
پس زید کے توقع روپیوں میں ۳/۴ × ۱۲ − لا اور بکر کی توقع ۱/۴ × ۱۲ + لا ہے
ان دونو کو برابر لکھنے سے ۲ لا = ۱۲/۴ اسیواسطے لا = ۳/۲

(۶۷) اگر م سکے ہوں جن تو م ہی عدد اونپر لکھی ہونگے تو ان چھوٹے سکوں کی جو توقع روپیوں کی ہوسکتی ہے وہ ن/م ہے اسمین ن کل عددوں کی تعداد ہے جو سکوں پر ہین پس کل توقع روپیوں تین
۱/م [۱ + ۲ + ۳ . . . + ر] یعنی ۱/م ر(ر+۱)(۲ر+۱)/۶ اور ن = ۱ + ۲ . . . + ر = ر(ر+۱)/۲

(۶۸) موافق مثال گذشتہ کے روپیونکے توقع
۱/ن [۱³ + ۲³ + . . + ر³] اسمین ن = ۱² + ۲² + . . . + ر²] دفعہ ۱۴۶ دیکھو

(۶۹) اب اول یہہ خیال کرو کہ اوسکو ہ سے کیا توقع ہوسکتی ہے ظاہر کہ وہ ۵ یا ۵۰ یا ۵۰۰ یا ۵۰۰۰
روپیہ پاسکتا ہے اور انمیں سے ہر صورت کا احتمال یکسان ہے پس اوسکی
توقع ۵(۱ + ۱۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰)/۵ یعنی ۵ × ۱۱۱۱۱/۵
اسی طرح سے ہم ۱ اور ۲ و ۳ و ۴ پر عمل کریں تو روپیوں میں توقع اوسکی ۱۱۱۱۱ × (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵)/۵

(۷۰) فرضکرو کہ کسی سکے پر م عدد لکھی ہوئی ہیں تو اس سکے کے نکالنی کا احتمال ب/د ہے
اور جو اس سکے کے نکالنے سے توقع ہے اوسکی امید ب م/د ہے اسلیے تمام سکوں سے توقع
ب ن/د ہے

(۷۱) اول تھیلی میں سے سفید گولی نکلنی کا احتمال ۸/۱۲ ہے اور دوسرے تھیلی میں سے سفید گولی
نکلنی کا احتمال ۴/۱۲ ہے پس اول تھیلی میں سے سفید گولی کے نکلنے کے احتمال کو دوسرے تھیلی میں سے گولی نکلنے کے
احتمال کے ساتھہ ایسی نسبت ہے جیسی کہ ۲/۳ کو ۱/۴ یعنی ۸ کو ۳ کے ساتھہ پس یہہ احتمال کہ سفید گولی پہلی تھیلی
سے نکلے ۸/۱۱ ہے

(۷۲) گولیوں کے نکالنے سے پہلے ہم تھیلی میں سفید گولیوں کے ہر ایک تعداد کی لیے یکسان احتمال خیال کرسکتے ہین

پس اس فرض کے موافق کہ پانچوں گولیاں سفید ہیں ۲ سفید گولیوں کے نکلنے کا احتمال ۱ ہے اور اس فرض کے موافق کہ چار سفید گولیاں ہیں + ۲ سفید گولیوں کے نکلنے کا احتمال ۳/۵ ہے اور اس فرض کے موافق کہ تین سفید گولیاں ہیں احتمال ۳/۱۰ ہے اور اس فرض کے موافق کہ دو سفید گولیاں ہیں + احتمال ۱/۱۰ ہے پس دو سفید گولیوں کے نکالنے کے بعد سب گولیوں کے سفید ہونے کا احتمال ۱ ÷ [۱ + ۳/۵ + ۳/۱۰ + ۱/۱۰] یعنی ۱/۲ ہے

(۷۳) اشرفی نکالنے سے پہلے تھیلی میں اشرفیوں کے ہر ایک تعداد کی نسبت یکساں احتمال خیال کر سکتے ہیں اب بموجب اس فرض کے کہ اوسمیں ن یک اشرفی تھی ایک اشرفی نکالنے کا احتمال ۱/ن ہے اور بموجب اس فرض کے کہ اوسمیں دو اشرفیاں تھیں احتمال ۲/ن ہے پس بعد اشرفی نکالنے کے اول فرض کا احتمال ۱/ن ÷ [۱/ن + ۲/ن + ۰۰۰ + ن/ن] یعنے ۱ ÷ ن(ن + ۱)/۲ ہے

(۷۴) چھوٹی تھیلی میں جو دو گولیاں نکال کر رکھی ہیں اونکی صورتیں دو طرح فرض کی جا سکتی ہیں یا تو دونو سفید ہیں یا ایک سفید ایک کالی بڑی تھیلی میں سے دو سفید گولیوں کی نکلنے کا احتمال ۳/۱۴ ہے اور ایک سفید گولی اور ایک سیاہ گولی نکلنے کا احتمال ۸/۱۴ ہے اور بموجب اول فرض کے چھوٹی تھیلی میں سے دو سفید گولی نکلنے کا احتمال ۱ ہے اور بموجب فرض دوم کے احتمال ۱/۲ ہے پس جب گولیاں نکال کر دیکھیں تو اول فرض کا احتمال ۳/۱۴ ÷ [۳/۱۴ × ۱ + ۸/۱۴ × ۱/۲] یعنے ۳/۵ ہے

(۷۵) اول تھیلی میں سے ۴ اشرفیوں کی نکلنے کا احتمال ۱ ہے اور دوسری تھیلی میں ۴ اشرفیوں کے نکلنے کا احتمال (۷ × ۸ × ۹ × ۱۰)/(۲۲ × ۲۳ × ۲۴ × ۲۵) یعنی ۲۱/۱۲۶۵ ہے پس یہہ احتمال کہ چاروں اشرفیاں اول تھیلی سے نکلی ہیں ۱ ÷ [۱ + ۲۱/۱۲۶۵] یعنی ۱۲۶۵/۱۲۸۶ ہے اور یہہ احتمال کہ چاروں اشرفیاں دوسری تھیلی سے نکلی ہیں ۲۱/۱۲۸۶ ہے پس ۱۲۶۵/۱۲۸۶ کے جگہہ ع رکھو اب جس تھیلی میں ۲۱ اشرفیاں ہیں اوس میں سے دوبارہ سکہ نکالنے کا احتمال ع ہے اور اوسے ع اشرفیوں کی توقع ہو سکتی ہے اور جس تھیلی میں ۶ اشرفیاں اور ۱۵ روپیے ہیں اوسمیں سے دوبارہ سکہ نکالنے کا احتمال ۱ − ع ہے اسے یہہ توقع ہوگی کہ (۱ − ع) [۶/۲۱ اشرفی + ۱۵/۲۱ روپیہ] یعنی (۱ − ع) × (۶ + ۱۵/۱۴)/۲۱ اشرفی

اسے معلوم ہوا کہ کل توقع ۱۲۶۵/۱۲۸۶ × ۱۱۱/(۱۲۸۶ × ۱۶)

(۷۶) اب نوٹوں کے باب میں چھ فرض ہو سکتی ہیں اور ہر فرض کا احتمال نوٹوں کے نکالنے سے پہلے ۱/۶ ہے
اول فرض کہ تینوں نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے ہوں دوم پانچ پانچ روپیہ کے دو اور ایک دس روپیہ کا
سوم پانچ پانچ روپیہ کے دو اور ایک بیس روپیہ کا چہارم ایک پانچ روپیہ کا دو دس دس روپیہ کے پنجم
ایک پانچ روپیہ کا دو بیس بیس روپیہ کے ششم ایک پانچ روپیہ کا دوسرا دس روپیہ کا تیسرا بیس روپیہ کا
ان فرضوں کے موافق نوٹوں کے نکلنے کے احتمالات یہہ ہیں

ا و (۲/۳)^۳ و (۲/۳)^۳ و (۱/۳)^۳ و (۱/۳)^۳

پس نوٹوں کے نکلنے کے بعد فرضوں کے احتمالات یہہ ہیں
۲۷/۴۶ و ۸/۴۶ و ۸/۴۶ و ۱/۴۶ و ۱/۴۶ و ۱/۴۶ پس کل مال کے قیمت کا احتمال
۱/۴۶ [۳۵ + ۴۵ + ۲۵ + ۳۰ × ۸ + ۲۰ × ۸ + ۱۵ × ۲۷] یعنی ۹۱۰/۴۶ ہے

(۷۷) اب دو فرض یہاں ہو سکتی ہیں کہ واقعہ واقع ہوا یا نہیں تو بموجب اول فرض کے زید کے
اظہار اور بکر کے اظہار اور عمر کے انکار کا احتمال ۳/۴ × ۴/۵ × ۱/۲ اور بموجب فرض دوم ۱/۴ . ۱/۵ . ۱/۲ ہے
تو اسے معلوم ہوا کہ اول فرض کا احتمال ۱۲/۱۴۰ ÷ [۱۲/۱۴۰ + ۶/۱۴۰] یعنی ۱۲/۱۳ ہے

(۷۸) یہہ ۷۴ کی ایک مثال ہی اور ع = ۳/۴ اور ع' = ۴/۵ اور ن = ۹
پس سچ کے واسطے نسبت موافق ایسے ہی جیسے ۳/۵ کو نسبت ہی ۱/۱۶۰ سے یعنی
جو ۹۶ کو ہے ا سے

(۷۹) فرض کرو کہ تیرہ گواہ ہیں اور ہر ایک کے سچ ہونے کا احتمال ع ہی اور واقعہ کی واقع ہونے کا
احتمال پہلی سے ق ہی تو بموجب دفعات ۷۲ اور ۷۵ کے احتمال وقوع واقعہ احتمال عدم وقوع
واقعہ سے ایسی نسبت رکھتا ہی جیسا کہ ع^۱۳ ق کو نسبت ہی (ا-ق) (ا-ع)^۱۳ یعنی اگر
ع = ۹/۱۰ تو نسبت وہ ہو گی جو ۹^۱۳ ق کو ہی ا-ق اور یہہ نسبت ا اور ا کی نسبت ہی
اگر ق = ۱/(۱ + ۹^۱۳)

(۸۰) چار بازیان طاش مین ہوتی ہین پس ورق کے گم ہونیکے پیشتر میر کے گم ہونیکا احتمال $\frac{1}{4}$ ہی اور یہہ احتمال کہ وہ میر نہین ہے $\frac{3}{4}$ ہی پس اگر میر گم ہوا ہو تو دو میرون کے نکالنی کا احتمال $\frac{11\times12}{51\times50}$ اگر میر گم نہ ہوا ہو تو $\frac{13\times12}{51\times50}$ پس جب دو تو میرون کا نکلنا دیکہہ چکی تو میر کے گم ہونیکا احتمال $\frac{1}{4}\cdot\frac{12\times11}{51\times50}\div\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{11\times12}{50\times51}+\frac{3}{4}\cdot\frac{12\times13}{50\times51}\right]$ یعنی $\frac{11}{50}$ ہے

(۸۱) اول ہم احتمال اس امر کا دریافت کرین کہ آدمی نہین ملتی ہین اور پہلی آدمی کا نام زید اور دوسرے آدمی کا نام بکر ہے اگر وہ دونو سڑک پر نہین ملتی تو زید اوس سری پر پہونچ لے گا جہان بکر کہڑا ہے تو بکر چلے گا یا بکر اوس سری پر پہونچ لے گا کہ جہان زید کہڑا ہے تو زید چلی گا اب ہم یہہ ثابت کرتے ہین کہ ان دونو دفعات مین سے ہر ایک واقعہ کا احتمال $\frac{ح^2}{2(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے زید بکر کے سرے پر ب + ح منٹون کے آخر مین کسی لحظہ مین پہونچیگا اور بکر اپنی سرے کو ا + ح منٹون کے اول منٹ کسی لحظہ پر چلیگا پس زید کے پہونچنے اور بکر کے چلنے کا احتمال $\frac{ح^2}{(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے یہہ دونو باتین ح منٹون مین جو مشترک دونو وقفون مین واقع ہوتی ہین اور چونکہ ایک واقعہ کے وقوع کا دوسرے واقعہ کے واقع ہونے سے پہلی اور پیچھے ایک ہی احتمال ہے اسلیے $\frac{ح^2}{2(ا+ح)(ب+ح)}$ احتمال زید کے پہونچنے کا پہلے بکر کے چلنے سے ہے اور یہی احتمال بکر کے زید کے سرے پر پہونچنے کا پہلے زید کے چلنے سے ہے پس ابھی معلوم ہوا کہ اون کی ملنے کا احتمال $1-\frac{ح^2}{(ا+ح)(ب+ح)}$ ہے

(۸۲) اول ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ن طاق اعداد کے ضرب دینے مین اس امر کا احتمال کہ اونکے اول ہندسہ ۵ ہو $\left(\frac{4}{5}\right)^{ن}$ ہے طاق اعداد کے اول ضروری ہے کہ اعداد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ مین سے کوئی عدد ہو پس $\frac{4}{5}$ احتمال اس امر کا ہے کہ وہ ۵ کا ہندسہ نہو ن طاق اعداد کے حاصل ضرب کے اول ہندسہ ۵ کا نہ ہو اسکی لئی ضرور ہے کہ ن اجزاء ضربی مین سے ہر جزو ضربی کے اول ۵ نہ ہو پس یہہ احتمال $\left(\frac{4}{5}\right)^{ن}$ ہے پس احتمال اس امر کا کہ حاصل ضرب کا آغاز ۵ سے ہوتا ہے $1-\left(\frac{4}{5}\right)^{ن}$ ہے اسواسطے ہم یہہ جانتے ہین کہ

۱ - $(\frac{4}{5})^{ن}$ چھوٹا $\frac{1}{2}$ سے نہ ہو یعنے $(\frac{5}{4})^{ن}$ بڑا $\frac{1}{2}$ سے نہ ہو
فرض کرو کہ $(\frac{4}{5})^{لا} = \frac{1}{2}$ یعنے $(\frac{8}{10})^{لا} = \frac{1}{2}$ پس لا لوگ ۰.۸ = لوگ $\frac{1}{2}$ اسیواسطے
لا (لوگ ۱۰ - لوگ ۸) = لوگ ۲ یعنی لا = $\frac{لوگ ۲}{۱ - ۳ لوگ ۲}$ پس لوگ ۲ کے قیمت معلوم ہونے پر
ہم کو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ ۳ اور ۴ کے درمیان لا واقع ہوتا ہے پس معلوم ہوا کہ
کم سے کم مثبت صحیح قیمت ن کی ۴ ہے جو $(\frac{4}{5})^{ن}$ کو کم $\frac{1}{2}$ سے کرتی ہے

چون وان باب

(۱) مجذور کرو تو ۲ - ۲ $\sqrt{۱ - لا^۲}$ = ۱ - لا^۲ اسیواسطے $[\sqrt{۱ - لا^۲} + ۱]^۲ = ۳$
اسیواسطے $\sqrt{۱ - لا^۲} = \pm \sqrt{۳} - ۱$ اسکا پھر مجذور کرو تو لا^۲ کی قیمت معلوم ہوجائیگی
(۲) اول مساوات سے لا = $\frac{ا ر (ر - ن)}{ب - ر}$ اسکو دوسرے مساوات مین مندرج کرو تو
ر^۲ (ا - لا) = $\frac{ب ا ر (ر - ن)}{ب - ر}$ - ب ن لا اسواسطے ا ر^۲ - $\frac{ب ا ر (ر - ن)}{ب - ر}$ = (ر^۲ - ب ان) لا
یعنے - $\frac{ا ر (ر^۲ - ب ن)}{ب - ر}$ = (ر^۲ - ب ان) لا پس کیا تو ر^۲ - ب ن = ۰ یا
- $\frac{ا ر}{ب - ر}$ = لا اگر ہم ر^۲ = ب ن لین تو معلوم مساواتون مین سے دوسرے مساوات
لا^۲ = ا ن اور اگر ہم لا = $\frac{ا ر}{ر - ب}$ کے لین اور معلوم مساواتون مین سے کسی مین
رکھین تو یہہ دریافت ہوگا کہ ر صفر ہے اور ایک قیمت اس مساوات درجہ دوم ر^۲ + (ا - ب - ن) ر + ا ن ب = ۰
(۳) دوسرے مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو (ر - ی) (لا + ر + ی) = ح^۲ - ب^۲
اور اسی قبیل کے نتیجے تیسرے مساوات کو دوسرے مساوات مین سے اور اول مساوات کو تیسرے مساوات سے
تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہین - مجذور کرو اور جمع کرو تو
(لا + ر + ی)^۲ (لا^۲ + ر^۲ - ر ی - ی لا - لا ر) = ا^۴ + ب^۴ + ح^۴ - ب^۲ ح^۲ - ح^۲ ا^۲ - ا^۲ ب^۲
تینون مساواتون کو جمع کرو تو
لا^۲ + ر^۲ + ی^۲ = $\frac{1}{2}$ (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ - ر ی - ی لا - لا ر)
یہہ قیمت لا^۲ + ر^۲ + ی^۲ کو مساوات مذکور مین مندرج کرو تو

(ا^۲ + ب^۲ + ح^۲)^۲ − [۳ (ءی + ی لا + لاء)] = ۴ (ا^۲ + ب^۲ + ح^۲) − ۴ (ب^۲ ح^۲ + ح^۲ ا^۲ + ا^۲ ب^۲)

اسے ہم ءی + ی لا + لاء کی قیمت دریافت کر سکتی ہین اوسکو ع سے تعبیر کرو تو معلوم

مساواتون کے جمع کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ۲ (لا + ء + ی)^۲ − ۳ ع = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲

تو اسی قیمت لا + ء + ی کی دریافت ہوگی اوسکو ق سی تعبیر کرو تو اس حل کے اول جو تین نتیجے لکھی ہین

اونکی صورت یہہ ہو جائیگے

ق (ء − ی) = ح^۲ − ب^۲ اور ق (لا − ء) = ب^۲ − ا^۲ اور ق (ی − لا) = ا^۲ − ح^۲

اسے قیمت لا اور ء اور ی کے دریافت ہوجائیگے

(۴) مجذور کرو اور ضرب دو تو (لا^۲ − ۴ لا − ۸)^۲ = ۸ (لا^۲ + ۲ لا + ۱۱) اسیواسطے

(لا^۲ − ۴ لا)^۲ − ۱۶ (لا^۲ − ۴ لا) + ۶۴ = ۸ (لا^۲ + ۲ لا) + ۸۸ اسیواسطے

(لا^۲ − ۴ لا)^۲ = ۲۴ (لا − ۱)^۲ اب جذر لے لو

(۵) بموجب دفعہ ۴۳۴ کے حلون کی تعداد ا ب ح سے زیادہ ایک سے فرق نہین کر سکتی

یعنے اس صورت مین ب ح/۲ سے پس ۲۲۰ سے بڑا ح نہین ہو سکتا

کیونکہ ۲۲۰ تقسیم ۱۲ اور ۵ پر ہوتا ہے صورت چہارم دفعہ ۴۳۴ کی دیکھو تو معلوم ہوگا کہ

حلون کی تعداد ۲۲۰/۲۰ − ۱ ہی یعنے ۱۰ پس ح بڑی سے بڑا ہو تو ۲۲۰ ہو

(۶) ربط معلوم کو ضرب دو اور ارقام منتقل کرو تو

(لا − ء) لا ء + (لا^۲ − ء^۲) ی = (لا^۲ − ء^۲) لا ء ی + (لا − ء) لا ء ی^۲

لا − ء پر تقسیم کرو تو لا ء + ء ی + ی لا = لا ء ی (لا + ء + ی) اب ربطات معلوم

مین سے کسی ایک کو لین اور اوسکو مختصر اور سادہ بنائین تو آخر کو تحویل ہو ہوا کر

اوسکی صورت وہی پیدا ہوگی جو اوپر بیان ہوئی

(۷) (ع/ن)^{۱/۳} = [(ع + ن)^۲ / ۴ ن ع^۲ − (ع − ن)^۲ / ۴ ن^۲ ع]^{۱/۳} اور = [(ع + ن)^۲ / ۴ ن^۲ − (ع − ن)^۲ / ۴ ع^۲]^{۱/۳}

بموجب مسئلہ جملہ ثنا سہ کے دونو جملہ ثنائیہ کو دو دو رقموں تک پہیلاؤ اور جمع کرو تو تقریباً یہہ ہم کو حاصل ہوگا کہ

$$2\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ع}+\text{ن}}{2\text{ن}} + \frac{2\text{ع}}{\text{ع}+\text{ن}} - \frac{(\text{ع}-\text{ن})^2}{4\text{ن}(\text{ع}+\text{ن})} + \frac{\text{ع}(\text{ع}-\text{ن})^2}{(\text{ع}+\text{ن})^3}$$

اخر کی دونو رقمیں مساوی ہیں $\frac{(\text{ع}-\text{ن})^2}{(\text{ع}+\text{ن})^2}\left[\frac{\text{ع}}{\text{ع}+\text{ن}} - \frac{\text{ع}+\text{ن}}{4\text{ن}}\right]$ یعنی $-\frac{(\text{ع}-\text{ن})^4}{4\text{ن}(\text{ع}+\text{ن})^3}$ کے اسواسطے

$$\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}+\text{ن}} + \frac{\text{ع}+\text{ن}}{4\text{ن}} - \frac{(\text{ع}-\text{ن})^4}{8\text{ن}(\text{ع}+\text{ن})^3}$$ تقریباً بدرجہ غایت

(۸) فرضکرو $\text{س}_\text{ن}$ سرمایہ کے روپیوں کو ن وین سال کے شروع مین تعبیر کرتا ہی تو ن وین سال کے اندر امدنی $\frac{3\text{س}_\text{ن}}{100} + 200$ ہوگی اور خرچ $\frac{5}{4}\left(\frac{3\text{س}_\text{ن}}{100} + 200\right) - 95$ ہوگا پس بچت $95 - \frac{1}{4}\left(\frac{3\text{س}_\text{ن}}{100} + 200\right)$ یعنی $45 - \frac{3\text{س}_\text{ن}}{400}$ ہے اسواسطے

$\text{س}_{\text{ن}+1} = \text{س}_\text{ن} + 45 - \frac{3\text{س}_\text{ن}}{400}$ اور یہہ اسطرح سے لکہا جا سکتا ہے کہ

$$\text{س}_{\text{ن}+1} - 6000 = \frac{397}{400}(\text{س}_\text{ن} - 6000)$$

پس اگر ۶۰۰۰ متواتر سالون کے اخر مین جو سرمایہ ہو اوسکی تعداد سے تفریق کیا جاے تو باقیات سے ایک سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا جسکی نسبت مشترک $\frac{397}{400}$ ہوگی اسواسطے

$\text{س}_{\text{ن}+1} - 6000 = (\text{س}_1 - 6000)\left(\frac{397}{400}\right)^\text{ن}$ اب $\text{س}_1 - 6000$ کے خواہ کچھہ ہی بچت ہو ہم ن کو اتنا بڑا فرض کرسکتے ہین کہ حاصل ضرب اسکا $\left(\frac{397}{400}\right)^\text{ن}$ جتنا چاہین چہوٹا ہو تو $\text{س}_{\text{ن}+1} - 6000$ صفر سے فرق ایسا نہ رکہے گا جو لحاظ کے قابل ہو

اگر $\text{س}_1 = 1000$ تو $\text{س}_{\text{ن}+1} - 6000 = -5000\left(\frac{397}{400}\right)^\text{ن}$ اسکو برابر -4000 کے رکہو تو $\left(\frac{397}{400}\right)^\text{ن} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ اسواسطے ن لوک $\frac{397}{400}$ = لوک $\frac{8}{10}$ اسواسطے $\text{ن} = \frac{\text{لوک }10 - \text{لوگ }8}{\text{لوک }400 - \text{لوک }397} = \frac{1 - 3\text{ لوگ }2}{2 + 2\text{ لوک }2 - \text{لوک }397}$ اور یہہ ۳۰ سے کچہہ ہی کم ہے اسی معلوم ہوا کہ اکتیسوین سال کے شروع مین سرمایہ کچہہ ۲۰۰۰ روپیہ سے زیادہ ہوگا

(۹) $\frac{1}{1-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^2} = \frac{1}{1-\text{لا}}\left(1+\frac{\text{ح}\,\text{لا}^2}{1-\text{لا}}\right)^{-1} = \frac{1}{1-\text{لا}} - \frac{\text{ح}\,\text{لا}^2}{(1-\text{لا})^2} + \frac{\text{ح}^2\,\text{لا}^4}{(1-\text{لا})^3} \cdots$

اب ہمین ہر رقم کو پھیلاؤ اور اوسمین $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر منتخب کرو جسطرح باب ۵ مثال ۳۲ مین کیا تھا اور پھر $\frac{\text{م}}{(\text{م}+1)^2}$ کو بجای ح کے رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $1-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^2 = \text{ح}\left(\frac{1+\text{م}}{\text{م}}-\text{لا}\right)(\text{م}+1-\text{لا})$

اسواسطے $\frac{1}{1-\text{لا}+\text{ح}\,\text{لا}^2} = \frac{\text{م}+1}{\text{م}-1}\left(\frac{1}{\frac{1+\text{م}}{\text{م}}-\text{لا}} - \frac{\text{م}}{\text{م}+1-\text{لا}}\right)$ اور اسکو پھیلانے سے

ن کا سر $\frac{\text{م}}{\text{م}-1}\left(\frac{\text{م}}{\text{م}+1}\right)^{\text{ن}} - \frac{1}{\text{م}-1}\left(\frac{1}{\text{م}+1}\right)^{\text{ن}}$

(۱۰) فرضکرو کہ $(1+\sqrt{2})^{\text{لا}}$ کا صحیح حصہ ص سے تعبیر ہوتا ہے اور ک سے کسری حصہ تو بموجب مسئلہ ثنائیہ کے

$\text{ص}+\text{ک} = 1+\text{لا}\,2^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)}{\lfloor 2}\,2 + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)}{\lfloor 3}\,2^{\frac{3}{2}} + \cdots$

اب $1-\sqrt{2}$ ایک منفی کسر واجب ہے اسواسطے $(1-\sqrt{2})^{\text{لا}}$ بھی منفی کسر واجب ہوگی اسکو $-\text{ک}'$ سے تعبیر کرو تو

$-\text{ک}' = 1-\text{لا}\,2^{\frac{1}{2}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)}{\lfloor 2}\,2 + \frac{\text{لا}(\text{لا}-1)(\text{لا}-2)}{\lfloor 3}\,2^{\frac{3}{2}} + \cdots$

جمع کرنے سے $\text{ص}+\text{ک}-\text{ک}' = 2+2\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-1)}{2}\,2 + \cdots$

اس سے معلوم ہوا کہ ک - ک' برابر صفر کے ہو اور ص - ۲ برابر ایک ایسے سلسلہ کے ہے جسکے ہر رقم پورے ۲×۲ لا یعنے ۴ لا پر تقسیم ہوتی ہے

(۱۱) فرض کرو کہ ن صحیح اعداد آپسمین ضرب دی گئی ہین ہر صحیح عدد مین اول ہندسہ ۰ و ۱ و ۲ ،،،، ۹ ہوسکتی ہین اسلئے کل صورتین $10^{\text{ن}}$ ہین اور حسب عادہ صورتین جنمین اول عدد طاق ہو اور ایک پانچ یا زیادہ پانچ ہون اب $5^{\text{ن}}$ صورتین ہین جنمین اول ہندسہ طاق ہو اور $4^{\text{ن}}$ صورتین وہ ہین جنمین اول ہندسہ ۵ نہین ہے پس $5^{\text{ن}}-4^{\text{ن}}$ صورتین ہین جنمین اول ہندسہ طاق ہے اور ایک پانچ یا زیادہ پانچ اونکے اول ہین اسواسطے احتمال $\frac{5^{\text{ن}}-4^{\text{ن}}}{10^{\text{ن}}}$ ہے اسیواسطے جب ن + ۱ ہندسون کو آپسمین ضرب دینگے تو احتمال $\frac{5^{\text{ن}+1}-4^{\text{ن}+1}}{10^{\text{ن}+1}}$ ہے اور یہہ چھوٹا ہے $\frac{5^{\text{ن}}-4^{\text{ن}}}{10^{\text{ن}}}$ سے ہی کسرون کے نسب نما یکسان کرنے سے یہہ امر ظاہر ہوجائیگا

(۱۲) فرضکرو کہ اول تھیلی مین ا اشرفیان اور م روپیے ہین اور دوسری تھیلی مین ب اشرفیان اور
ن روپیے ہین پس ایک تھیلی جو بے تامل اٹھائی جائی اوسمین سے ایک اشرفی نکلنی کا احتمال

$\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا}+\text{م}}+\frac{\text{ب}}{\text{ب}+\text{ن}}\right)$

پس اگر سب سکی ایک تھیلی مین رکھہ دی جائین تو اوسمین سے ایک اشرفی نکلنی کا احتمال

$\frac{\text{ا}+\text{ب}}{\text{ا}+\text{ب}+\text{م}+\text{ن}}$ ہے یہہ احتمالات برابر ہین اگر

$(\text{ا}+\text{ب}+\text{م}+\text{ن})\left[\text{ا}(\text{ب}+\text{ن})+\text{ب}(\text{ا}+\text{م})\right] = 2(\text{ا}+\text{ب})(\text{ا}+\text{م})(\text{ب}+\text{ن})$

سب رقمون کو ایک طرف لاؤ اور سادہ بناؤ تو اونکی تحویل اور اختصار یہہ ہوگا کہ

$(\text{ب م}-\text{ا ن})(\text{ا}+\text{م}-\text{ب}-\text{ن}) = 0$ اسے مثال کا اول جزو ثابت ہوا

دوم فرضکرو کہ ا+م بڑا بہ نسبت ب+ن کے ہے تو اس تھیلی کے بے تامل اٹھانی کا احتمال قوی ہے،
بشرطیکہ $(\text{ب م}-\text{ا ن})(\text{ا}+\text{م}-\text{ب}-\text{ن})$ ایک مثبت ہے اور یہہ مثبت
اوس حالت مین ہے کہ ا ن چھوٹا بہ نسبت ب م کے ہو اور اسیواسطے $\frac{\text{ا}}{\text{م}}$ چھوٹا بہ نسبت
$\frac{\text{ب}}{\text{ن}}$ کے ہو پس اسی مثال کا دوسرا جزو ثابت ہے

پچپن وان باب

(۲) دفعات ۳۰۷ اور ۳۰۸ کو دیکھو

(۳) فرضکرو کہ مسطاس کو لا تعبیر کرتا ہے تو $1440 = 4\,\text{لا}^2 + 4\,\text{لا}$

(۴) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$ مین سے ۲ کو تفریق کرو تو

$2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$

(۵) فرض کرو کہ منتخب کرنے والے لا تھے تو امیدوار ۲ لا + ۱ ہونگے
۲ لا + ۱ کو ن سے تعبیر کرو پس اب ن طور ہونگے جو ایک آدمی کے انتخاب کے لئی انتخاب
کرنے والا اپنے رائے ظاہر کر سکتا ہے اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ طور ہونگے جو دو آدمیون کے انتخاب کے
لئے انتخاب کرنے والا اپنی رائے ظاہر کر سکتا ہی اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ طور ہونگے

جو ہیت اد میون کے لئی انتخاب کرنے والا اپنی رای ظاہر کرسکتا ہی اور علیٰ ہذا القیاس آگے

پس ۱۵ = ن + ن (ن + ۱) / ۲ + ن (ن + ۱) (ن + ۲) / ۳ + ۔۔۔ لا رقمون تک

اب اگر (۱ + ۱)^(۲لا+۱) کی صورت مفصلہ سی اول و اخر رقم نکال ڈالین تو باقی ایک سلسلہ دو جنسی اوپر کے سلسلہ سے حاصل ہوگا پس ۱۵ = ½ (۲^(۲لا+۱) − ۲) اسیواسطے ۲^(۲لا+۱) = ۳۲ = ۲^۵

اور ۲لا + ۱ = ۵

(۷) اول دو رقمون کو جمع کرو تو (۱ + ی + ی^۲) / ((۱ + ی) (۱ + ی^۲)) یعنی ۱ − ی^۳ / ((۱ + ی) (۱ + ی^۲)) حاصل ہوگا

اب اسپر تیسرے رقم اور جمع کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱ − ی^۶ / ((۱ + ی) (۱ + ی^۲)) (۱ − ۱ / (۱ + ی^۴)) یعنے

۱ − ی^۷ / ((۱ + ی) (۱ + ی^۲) (۱ + ی^۴)) اسی طرح عمل کئی جاؤ تو ن رقمون کا مجموعہ یہہ حاصل ہوگا کہ

۱ − ی^(ع−۱) / ((۱ + ی) (۱ + ی^۲) ۔۔ (۱ + ی^ق)) اسمین ع = ۲^ن اور ق = ۲^(ن−۱) اگر کسر کے

نسب نما اور شمار کنندہ دونون کو ۱ − ی مین ضرب دین تو مجموعہ ۱ − ((۱ − ی) ی^(ع−۱)) / (۱ − ی^ع) حاصل ہوگا

(۸) ۱ + ۲لا^۳ − لا^۲ − ۲لا^۴ = ۱ − لا^۲ − ۲لا^۳ (۱ − لا) = (۱ − لا) (۱ + لا − ۲لا^۳)

= (۱ − لا) (۱ − لا^۳ + لا − لا^۳) = (۱ − لا)^۲ (۱ + لا + لا^۲ + لا + لا^۲)

= (۱ − لا)^۲ [(۱ + لا)^۲ + لا^۲] اور یہہ مقدار کبھی منفی نہین

(۹) فرضکرو کہ ا اور ب دو مقداریں ہون اور انکے بیچ ن اوساط مندرج ہوئی ہون تو

سلسلہ حسابیہ کی م وین رقم ا + (م − ۱) / (ن + ۱) (ب − ا) اور سلسلہ ہندسیہ کے

میمی رقم ا (ب / ا)^((م−۱)/(ن+۱)) اول = ((ن − م + ۲) ا + (م − ۱) ب) / (ن + ۱) اور

دوم = (ا^(ن−م+۲) ب^(م−۱))^(۱/(ن+۱)) ان کو ہم اوسط حسابیہ اور اوسط ہندسیہ ن + ۱ مقدارون

کی جنمین ن − م + ۲ برابر ا کے اور م − ۱ برابر ب کے ہین خیال کرسکتی ہین اسیواسطے

اول کو بڑا بہ نسبت دوسرے کے موافق دفعہ ۱۸۱ کے خیال کرسکتے ہین

(۱۰) فرضکرو کہ (۲ + √۳)^لا کا صحیح حصہ ص اور کسری حصہ ک ہے بموجب جذر ثنائی کے

ص + ک = ۲^لا + لا ۲^(لا−۱) √۳ + (لا (لا − ۱)) / ۲ ۔۔۔ × ۳ + ۔۔۔۔

لا = ۵۹۵ − ۳۲۱ اور ی = ۲۶ ط ہے اگر حلون مین صفر داخل ہے تو ۳ حل ورنہ اگر وہ خارج ہے تو ۲ حل

اور ۲ و ۳ . . . سالون کے آخر مین دیا جائے اور اس سلسلہ کا مجموعہ دفعہ ۳۴۷ مین
ا = ن/(ن-۱) اور ب = - ن/(ن-۱) اور ر = ۱/ر کے رکھہ کر نکال لین

چھپنوان باب

(۱) حاصل ضرب کی لوکارثم مین تعوض سے ہمکو ایک سلسلہ غیر متناہی حاصل ہوگا جسکی نونی رقم لوک بن ہوگی اب ہم کو امتحان کرنا چاہیے کہ یہہ سلسلہ انضمامی ہے یا نہین اگر وہ انضمامی ہے تو حاصل ضرب کے لوکارثم محدود ہوگی اسلیے حاصل ضرب بہی محدود ہوگا اور اگر سلسلہ جسکی ن وین رقم لوگ بن ہے انفراجی اور منفی ہے تو حاصل ضرب کے لوکارثم منفی اور تعداد کی اعتبار سے غیر محدود ہوگی اس صورت مین حاصل غیر محدود چہوٹا ہوگا

(۲) جملہ معلوم کو ع سے تعبیر کرو تو

لوک ع = لا لوک ن + لوک ۱/(لا+۱) + لوگ ۲/(لا+۲) + لوگ ۳/(لا+۳) + . . . + لوک ن/(لا+ن)

= لا لوک ن - لوک (۱+لا) - لوک (۱ + لا/۲) - لوک (۱ + لا/۳) . . . - لوک (۱ + لا/ن)

اب لوک ن = لوگ (۱/۱ . ۲/۱ . ۳/۲ . . . ن/(ن-۱)) = لوگ ۱/۱ + لوک ۲/۱ + لوک ۳/۲ + . . . + لوک ن/(ن-۱)

پس لوک ع کو مجموعہ ان قیمتوں کا خیال کر سکتے ہین جنمین اول رقم - لوک (۱+لا) ہے اور ر کے سب قیمتوں کے موافق بڑی ۱ سے ہے اور ر وین رقم لا لوک ر/(ر-۱) - لوگ (۱ + لا/ر) یعنی - لا لوک (۱ - ۱/ر) - لوک (۱ + لا/ر) ہے

پس اگر لا منفی صحیح ہو تو لوگ ع مین رقم - لوک (۰) حاصل ہوگی پس لوک ع غیر متناہی ہوگا لیکن اگر لا ایک منفی عدد نہ ہو تو ہریک رقم لوگ ع مین محدود ہوگی اور ر کی سب قیمتوں کے موافق جو تعداد کے لحاظ سے بڑی لا سے ہون ہم ر وین رقم کو اسطرح پہیلا سکینگے کہ اوسکی صورت یہہ ہوگی کہ لا (۱/ر + ۱/۲ر² + ۱/۳ر³ + . . .) - (لا/ر - لا²/۲ر² + لا³/۳ر³ - . . .) یعنی (لا + لا²)/۲ر² + وہ اقسام جنمین ۱/ر³ و ۱/ر⁴ . . . وغیرہ شامل ہین پس ر وین رقم نسبت محدود ۱/ر² سے رکہتی ہے پس سلسلہ جس سے لوگ ع بنتا ہے انضمامی ہے دفعات ۲۷۱ اور ۲۹۵ دیکہو

(۳) ان اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کو س سے تعبیر کرو (ر+۱) وان جزو ضربی ((س+ر)(ص+ر))/((لر+ر)(۱+ر)) یعنی

اسسے معلوم ہوا کہ سلسلہ جسکی نونی رقم سن ہے انفراجی ہی بموجب دفعہ ۷۶۱ کے

(۸) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{۲ن-۱}{۲ن-۳} \cdot \frac{۲ن-۲}{۲ن-۳} \cdot \frac{۱}{لا}$ پس بموجب دفعہ ۷۶۲ کے سلسلہ انفراجی ہی اگر لا چھوٹا ہے واحد سے اور انفراجی ہی اگر لا بڑا ہو واحد سے اگر لا = ۱ تو $ن\left(\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} - ۱\right) = ن\left[\frac{(۲ن-۱)(۲ن-۲)}{(۲ن-۳)^۲} - ۱\right]$

$= \frac{۴ن^۲ - ۷ن}{(۲ن-۳)^۲}$ اور سلسلہ بموجب دفعہ ۷۶۶ کے انضمامی ہے

(۹) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{ن^۲}{(ن-۱+ص)(ن-ص)} = \frac{ن^۲}{ن^۲ - ن + ص(۱-ص)}$ بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۷۶۷ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ ا - ط - ۱ = ۰ پس سلسلہ انفراجی ہے

(۱۰) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{ن^ع}{(ن-۱)^ع} \times \frac{ن^ق}{(ن+۱)^ق} = \frac{ن^{ع+ق}}{ن^{ع+ق} + (ع-ق)ن^{ع+ق-۱} + \dots}$

بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۷۶۷ کے ہم کو یہہ حاصل ہی کہ ا - ط - ۱ = ق - ع - ۱ یہہ سلسلہ انضمامی ہی اگر ق - ع - ۱ مثبت ہی اور انفراجی ہی اگر ق - ع - ۱ منفی یا صفر ہے

(۱۱) فرض کرو کہ ن کے کسی خاص قیمت سے یا اوسکی مابعد سے لا لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ ہمیشہ بڑی لا سے ہے اور لا مثبت اور بڑا واحد سے ہی پس لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا $\frac{لا}{ن}$ سے ہے اور اسیواسطے جب ن کما منفی بڑا ہو تو لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا بہ نسبت لوگ $\left(۱+\frac{لا}{ن}\right)$ کے ہی دفعہ ۷۸۶ دیکھو اسیواسطے جب ن کما منفی بڑا ہوا $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ بڑا $۱+\frac{لا}{ن}$ سے ہوا اور اسیواسطے دفعہ ۷۶۶ کی طرح سلسلہ جسکی ن وین رقم سن ہے انضمامی ہے

(۱۲) یہان ن کی کسی معین قیمت سے یا اوسکی مابعد سے لوگ مثبت ہی اور $\frac{۱}{ن}$ سے بڑی نہین ہے، یا منفی ہی اول صورت مین لوگ $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا لوگ $\frac{ن}{ن-۱}$ سے بموجب دفعہ ۷۸۸ کے ہی اور اسیواسطے $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا بہ نسبت $\frac{ن}{ن-۱}$ کے ہے اور دوسری صورت مین $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا بہ نسبت واحد کے ہی پس دونو صورتون مین $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}}$ چھوٹا $\frac{ن+۱}{ن}$ سے ہی اسی معلوم ہوا کہ دفعات ۷۶۵ اور ۷۶۲ کے موافق سلسلہ جسکی نونی رقم سن ہے انفراجی ہے

(۱۳) یہان $\frac{س_ن}{س_{ن+۱}} = \frac{(ن+۱)(۱+ن لا)}{(۱+ن لا+لا)ن+۱} = \frac{۱}{لا\left(۱+\frac{۱}{ن+ن لا}\right)}\left(۱+\frac{لا}{ن لا+۱}\right)^ن$

دوم فرض کرو کہ ا - ط - ا صفر ہے

تو $\frac{س_ن}{س_{ن+1}}$ چھوٹا $\frac{ن+1}{ن}$ سے ہوگا بشرطیکہ ا + $\frac{ا}{ن}$ + $\frac{ب}{ن^2}$ + $\frac{ج}{ن^3}$ + ... چھوٹا

$(1 + \frac{1}{ن})(1 + \frac{ط}{ن} + \frac{ص}{ن^2} + \frac{س}{ن^3} + \dots)$ سے ہو یعنی بشرطیکہ ط + ص - ب + $\frac{ص + س - ج}{ن}$ + ...

مثبت ہو پس اگر ط + ص - ب مثبت ہے تو ظاہر ہے شرط ان کو کافی بڑا فرض کرنے سے پوری ہو جائیگی

اگر ط + ص - ب مثبت نہ ہو تو م ایسا معین مثبت عدد مقرر کرو کہ ط + ص - ب + م مثبت ہو

تو $\frac{س_ن + م}{س_{ن+م+1}}$ = چھوٹا $\frac{ن+1}{ن}$ سے ہوگا بشرطیکہ ا + $\frac{ا}{ن+م}$ + $\frac{ب}{(ن+م)^2}$ + ... چھوٹا

$(1 + \frac{1}{ن})\left[1 + \frac{ط}{ن+م} + \frac{ص}{(ن+م)^2} + \dots\right]$ سے ہو یعنی اگر ا + $\frac{ا}{ن}$ + $\frac{ب - م ا}{ن^2}$ + $\frac{ج - ۲م ب + م^2 ا}{ن^3}$ + ...

چھوٹا $(1 + \frac{1}{ن})\left[1 + \frac{ط}{ن+م} + \frac{ص}{(ن+م)^2} + \dots\right]$ یعنی اگر

$1 + \frac{ا}{ن} + \frac{ب - م ا}{ن^2} + \frac{ج - ۲م ب + م^2 ا}{ن^3} + \dots$ چھوٹا

$(1 + \frac{1}{ن})\left[1 + \frac{ط}{ن} + \frac{ص - م ط}{ن^2} + \frac{س - ۲م ص + م^2 ط}{ن^3} + \dots\right]$ یعنی اگر

اگر ط + ص - م ط - (ب - م ا) مثبت ہو یعنی اگر ط + ص - ب + م مثبت ہو اور یہ صورت بموجب فرض کے ہے

پس مثال گذشتہ کی فرض دوم کے طرح تحقیقات کرنے سے یہہ ہم کو معلوم ہوگا کہ سلسلہ مفروض انفراجی ہے

سوم فرض کرو کہ ا - ط - ا منفی ہے یہاں

ب و ج ... و ط و ص و س ... وغیرہ جنمیں ا - ط - ا صفر ہے یعنی $\frac{س_ن}{س_{ن+1}}$ ہمیشہ

اپنی متناظر کی نسبت سے اوس سلسلہ میں کم ہے جو فرض دوم میں انفراجی ثابت ہو چکا ہے اسواسطے

بموجب دفعہ ۶۵ کے سلسلہ جسکی ن وین رقم س ہے انفراجی ہے

(۱۴) یہاں ع = ن $\frac{(ط - ا) ن^{ع-1} + (ب - ص) ن^{ع-2} + \dots}{ن^ع + ط ن^{ع-1} + ص ن^{ع-2} + \dots}$

اول فرض کرو کہ ط - ا مثبت ہے اگر صہ + ا بڑا سہ سے ہو تو سلسلہ بموجب دفعہ ۶۶ کے

انضمامی ہے اور اگر صہ + ا چھوٹا سہ سے ہو تو سلسلہ بموجب دفعہ ۶۷ کے انفراجی ہے

اگر صہ + ا = سہ تو سلسلہ انضمامی ہے اگر ا - ط بڑا ایک سے نہیں اگر

ا - ط = ا تو ہم دفعہ ۷۳ کو کام میں لائینگے اس صورت میں ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

سلسلہ جسکی ن وین قسم من سی انفراجی ہے اسیواسطے بموجب دفعہ ۷۵ کے سلسلہ جسکی ن وین قسم $س+۱$ ہے انفراجی ہے

ستاون وان باب

(۱) دفعہ ۷۵۹ مین $ا = ۵$ اور $ب = ۱$ سکے رکھو تو ہم کو جملہ کی قیمت یہہ معلوم ہوگی کہ $۲^{ن}$ ہے

(۲) بموجب دفعات ۷۴، ۷۵۹ کے جملہ $= \sqrt{(ن+۱)^۲ - (ن-۱)^۲}$ یعنے $ن^۲ + ۱ - (ن^۲ - ۱)$ الخ

(۳) استقرا سے یہہ ثابت ہوسکتا ہی مان لوکہ $ع_{ن} = ب ق_{ن-۱}$ اور $ع_{ن-۱} = ب ق_{ن-۲}$ ہے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع_{ن+۱} = ا ع_{ن} + ب ع_{ن-۱} = ا ب ق_{ن-۱} + ب^۲ ق_{ن-۲} = ب (ا ق_{ن-۱} + ب ق_{ن-۲}) = ب ق_{ن}$$

پس جب نتیجہ ن کی کسی قیمت تک درست ہی تو وہی مابعد کا نتیجہ ہی یعنی جب ن کے قیمت پر ایک زیادہ کرین درست ہی اور یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ نتیجہ صحیح ہی جب $ن = ۱$ تو وہ صحیح ہوگا جب $ن = ۲$ اسیواسطے وہ ہمیشہ صحیح ہے

(۴) یہان $لا^{ن}$ کا سر $\frac{ب}{۱ - ا لا} \left(۱ - \frac{ب لا^۲}{۱ - ا لا}\right)^{-۱}$ کی صورت مفصلہ مین $ع_{ن}$ ہے یعنے $\frac{ب}{۱ - ا لا} + \frac{ب^۲ لا^۲}{(۱ - ا لا)^۲} + \frac{ب^۳ لا^۳}{(۱ - ا لا)^۳} + \ldots$ کے صورت مفصلہ مین اب ان مین ہر رقم کو بموجب مسئلہ جملہ ثنائیہ پہلا مین اور اونمین سے ہر ایک مین $لا^{ن}$ کے امثال چن لین اور $لا^{ن}$ کا سر $\frac{۱ + ب}{۱ - ا لا - ب لا^۲}$ کی صورت مفصلہ مین $ق_{ن}$ ہے یعنی $\frac{۱}{لا(۱ - ا لا - ب لا^۲)} - \frac{۱}{لا}$ کی صورت مفصلہ مین پس $لا^{ن+۱}$ کا سر $\frac{۱}{لا(۱ - ا لا - ب لا^۲)}$ کے صورت مفصلہ مین $ق_{ن}$ ہے یعنے $\frac{۱}{۱ - لا} + \frac{ب لا^۲}{(۱ - ا لا)^۲} + \frac{ب^۲ لا^۳}{(۱ - ا لا)^۳} + \ldots$ کی صورت مفصلہ مین - اس باب پر خیال کرلینا چاہیے کہ یہی صورتین یہہ جو $ع_{ن}$ اور $ق_{ن}$ کے واسطے حاصل ہوئی ہین مثال سوم کے دعوی کا ثبوت بلاواسطہ ہی

(۵) یہہ استقرا سے ثابت ہوسکتا ہی ہم کو معلوم ہے کہ $ع_{ن} = ن (ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲})$ اور $ق_{ن} = ن (ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲})$ اسیواسطے $ع_{ن} + ق_{ن} = ن (ع_{ن-۱} + ق_{ن-۱} + ع_{ن-۲} + ق_{ن-۲})$

توع اول کی ایک کسر مسلسل غیر متناہی $\frac{1}{لا}$ لوک (۱ + لا) کے واسطے حاصل ہوگی جسکے ہر حلقہ کا نسب نما ۱ ہوگا اور اول حلقہ کے شمار کنندہ کا ۱ ہے اور دوسرے کا $\frac{1}{2}$ لا اور علے العموم ۲ ر وان $\frac{ر^2 لا}{2(2ر-1)}$ اور (۲ر + ۱) وان $\frac{ر^2 لا}{2(2ر+1)}$ ہے

اٹھاون وان باب

(۱) اول اور دوم مساوات سے تفریق کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لا - ی = ب ی - ا لا اسیواسطے لا (۱ + ا) = ی (۱ + ب) اور اسی طرح دوم اور سوم مساوات سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ی (۱ + ب) = ی (۱ + ج) اور سوم اور چہارم مساوات سے ی (۱ + ج) = ھ (۱ + د)

ی (۱ + ا) = ی (۱ + ب) = ی (۱ + ج) = ھ (۱ + د) = ک کے فرض کرو اول مساوات مین ان کو مندرج کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$\frac{1}{1+ا} = \frac{ب}{1+ب} + \frac{ج}{1+ج} + \frac{1}{1+د}$ اور $\frac{1}{1+ا} = 1 - \frac{ا}{1+ا}$ پس اسسے نتیجہ مطلوب حاصل ہے

(۲) $\frac{لا}{ا}$ = ی + ی اور $\frac{ی}{ب}$ = ی + لا اور $\frac{ی}{ج}$ = لا + ی دوسرے مساوات کو اول مساوات مین سے تفریق کرو تو $\frac{لا}{ا} - \frac{ی}{ب}$ = ی - لا اسیواسطے $\frac{لا(1+ا)}{ا} = \frac{ی(1+ب)}{ب}$ اسی طرح تیسرے مساوات کو دوسرے مساوات سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ $\frac{ی(1+ب)}{ب} = \frac{ی(1+ج)}{ج}$ پس

$\frac{لا(1+ا)}{ا} = \frac{ی(1+ب)}{ب} = \frac{ی(1+ج)}{ج}$ = ک کے فرض کرو اول مساوات مین ان کو درج کرو تو $\frac{ا}{1+ا} = \frac{ب}{1+ب} + \frac{ج}{1+ج}$ کسور کو دور کرو اور اختصار کرو تو

ا ب + ب ج + ج ا + ۲ ا ب ج = ۱

پہر $\frac{لا}{ا(1 - ب ج)} = \frac{ک ا^2}{(1+ا)^2 (1 - ب ج)} = \frac{ک ا^2}{1 + 2ا + ا^2 - ب ج - 2 ا ب ج - ا^2 ب ج}$

لیکن ۱ - ب ج - ۲ ا ب ج = ا ب + ج ا پس $\frac{لا}{ا(1 - ب ج)}$ کی تحویل $\frac{ک ا^2}{ا^2 + ا + ا ب + ج ا - ا^2 ب ج}$ کی طرف ہوتی ہے یعنی $\frac{ک^2}{2 + ا + ب + ج - ا ب ج}$ اور اسی طرح

۸ اَ بَ حَ = [illegible] + [illegible] + [illegible] + [illegible] + [illegible] + [illegible] + ۱ اَ بَ حَ

اسیواسطے ۴ (و وَ + ب بَ + ح حَ) − ۶ ا ب ح = ۸ اُ بُ حُ − ۲ اِ ب ح

اسیواسطے و وَ + ب بَ + ح حَ = ا ب ح + ۲ اُ بُ حُ

(۱۷) اب ۱۱ حروف ہیں جنمیں ا اور ک اور ن دو دفعہ اتے ہیں پس ۹ جدا جدا حروف سے ۸×۷×۶ ترتیبیں حاصل ہوتی ہیں یعنی ۳۳۶ ترتیبیں اسیواسطے ۷×۱×۵ ترتیبیں ہیں جنمیں ا دو دفعہ واقع ہوتا ہی اسواسطے کہ اور سات حرفون میں سے ہر ایک حرف اول اور دوم اور سوم مقام پر تینون جگہ واقع ہو سکتا ہی اور علیٰ ہذا القیاس ۷×۳ وہ ترتیبیں ہیں جنمیں ک دوبارہ واقع ہو اور اتنے وہ ترتیبیں ہیں جنمیں ن دوبارہ واقع ہو پس کل ترتیبیں مختلف
= ۳۳۶ + ۴۳ = ۳۷۹

(۱۸) صفائی کے واسطے فرض کرو کہ م − ۱ روشین باغ کی طول کے متوازی ہیں اور ن − ۱ روشین باغ کی عرض کے متوازی ہیں پس اوس شخص کون زوج کیاریان باغ کے طول کی سمت میں اور م زوج کیاریان عرض کی سمت میں طی کرنے پڑینگے اب (م + ن) حصے اوسکی رستی میں ہوئی اور یہہ کسی ترتیب سے واقع ہو سکتی ہیں پس اونکی ترتیبون کے تعداد برابر اون ترتیبون کے تعداد کے ہوئی جو م + ن اشیا میں سے جنمیں م ایک قسم کے اشیا اور ن ایک قسم کی اشیا مین کل کے ترتیبیں ہیں

(۲۱) ع^۲ = (لا^۲ + ز^۲ − ۲ لا ز) (ز^۲ + ی^۲ − ۲ ز ی) (ی^۲ + لا^۲ − ۲ ی لا)

ق^۲ = (لا^۲ + ز^۲ + ۲ لا ز) (ز^۲ + ی^۲ + ۲ ز ی) (ی^۲ + لا^۲ + ۲ ی لا)

اسے معلوم ہوا کہ ع^۲ + ق^۲ − ۲ ل^۲ =

۸ لا ز ی [لا (ز^۲ + ی^۲) + ز (ی^۲ + لا^۲) + ی (لا^۲ + ز^۲)] = ۸ لا ز ی (ق^۲ − ۲ لا ز ی)

پس ۱۶ لا^۲ ز^۲ ی^۲ − ۸ ق^۲ لا ز ی + ع^۲ + ق^۲ − ۲ ل^۲ = ۰

اسی طرح ہم کو یہہ دریافت ہو سکتا ہے

$۱۶ لاً^۲ یٰ^۲ - ۸ ر لاً یٰ + ع^۲ ق^۲ + ر^۲ - ۲ ص^۲ = ۰$

اس مساوات درجہ دوم سے لا ی ہم کو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$لا ی = \frac{۱}{۴}\left(ق \pm \sqrt{ر^۲ - ع^۲}\right)$$

لاً یٰ کے مساوات درجہ دوم سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$لاً یٰ = \frac{۱}{۴}\left(ر \pm \sqrt{ر^۲ ص^۲ - ع^۲ ق^۲}\right)$$

اسیواسطے

$$\left(ر \pm \sqrt{ر^۲ ص^۲ - ع^۲ ق^۲}\right)^۲ = \left(ق \pm \sqrt{ر^۲ - ع^۲}\right)^۲$$

(۲۲) چونکہ $لاً = ا لا + ا_۱ لا_۱ + ا_۲$ اور $یً = ب لا + ب_۱ لا_۱ + ب_۲$ اور $یٰ = ح لا + ح_۱ لا_۱ + ح_۲$

تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ $لاً (ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱) + یً (ح_۱ ا_۲ - ح_۲ ا_۱) + یٰ (ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱) =$

$= ا_۲ (ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱) + ب_۲ (ح_۱ ا_۲ - ح_۲ ا_۱) + ح_۲ (ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱)$ دفعہ ۲۰۷ دیکھو

اور چونکہ $ا لاً + ب یً + ح یٰ = ۰$ اور $ا_۲ لا + ب_۲ ی + ح_۲ ی = ۰$ تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لاً}{ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱} = \frac{یً}{ح_۱ ا_۲ - ح_۲ ا_۱} = \frac{یٰ}{ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱}$$ دفعہ ۲۸۵ دیکھو

پہلے نتیجہ مین یً اور یٰ کے جگہہ ان کو رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$لاً = \frac{(ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱)\left(ا_۲ (ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱) + ب_۲ (ح_۱ ا_۲ - ح_۲ ا_۱) + ح_۲ (ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱)\right)}{(ب_۱ ح_۲ - ب_۲ ح_۱)^۲ + (ح_۱ ا_۲ - ح_۲ ا_۱)^۲ + (ا_۱ ب_۲ - ا_۲ ب_۱)^۲}$$

یً اور یٰ کی قیمتین اسی طرح معلوم ہو سکتی ہین مجذور اور جمع کرنے سے ہم کو نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا

(۲۳) فرض کرو کہ ن = ۲ تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $\frac{ا}{ب} + \frac{ا_۱}{ب_۱ ب_۲}$ چہوٹا $\frac{ا_۱}{ب} + \frac{ا}{ب_۱ ب_۲}$ سے تاکہ $ا_۱ \left(\frac{۱}{ب_۱ ب_۲} - \frac{۱}{ب}\right)$ چہوٹا $ا \left(\frac{۱}{ب_۱ ب_۲} - \frac{۱}{ب}\right)$ سے ہے اور یہہ ظاہر ہے کیونکہ $ا_۱$ چہوٹا $ا$ سے ہے اب ن کی کچہہ ہی قیمت ہو جب کسور کو اس ترتیب سے رکہینگے کہ جسے کم از کم مجموعہ کو زوج کسور پیدا ہو تو بڑا نسب نما بڑی شمار کنندہ کے نیچے ہوگا یہہ بات ابہی ہم ذو ثابت کی ہے اسی معلوم ہوا کہ وہ ترتیب جسی کہ کم از کم مجموعہ پیدا ہوتا ہے وہ وہ ترتیب ہی مثال کے اول حصہ مین لکہی ہوئی ہے

(۲۴) $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{ن+۱} = \left(۱ - \frac{ا}{ب}\right)^{ن+۱}$ اسکی لوکارثم

= - (ا - ب + ۲ ب) [(ب - ا)/ب + ۱/۲ ((ب - ا)/ب)^۲ + ... + ۱/ن ((ب - ا)/ب)^ن + ...]

پس لوکارثم کو اس صورت میں لکھ سکتے ہیں

- ۲ (ب - ا) - (۱/۲ - ۲/۳) (ب - ا)^۲/ب^۲ ...... - (۲/ن - ۱/(ن - ۱)) (ب - ا)^ن/ب^(ن - ۱) ...

(۲۵) پہلی مثال میں فرض کرو کہ ایک ہی مقدار ا اور ب پر زیادہ کی گئی ہے تو لوکارثم بہ اعتبار تعداد کے کم ہو گی اور چونکہ لوکارثم منفی ان کو کسر (ا/ب)^(ا+ب) زیادہ ہو گی

سوالات متفرقہ

(۱) لا - [۲ د + [۳ ی - ۳ لا - (لا + د)]] + ۲ لا - (د + ۳ ی)

= لا - [۲ د + [۳ ی - ۳ لا - لا - د]] + ۲ لا - د - ۳ ی

= لا - [۲ د + ۳ ی - ۴ لا - د] + ۲ لا - د - ۳ ی

= لا - ۲ د - ۳ ی + ۴ لا + د + ۲ لا - د - ۳ ی = ۷ لا - ۲ د - ۶ ی

(۲) ا لا^۲ - ب لا + ج) ا^۲ لا^۴ + (۲ ا ج - ب^۲) لا^۲ + ج^۲ (ا لا^۲ + ب لا + ج

ا^۲ لا^۴ - ا ب لا^۳ + ا ج لا^۲

ا ب لا^۳ + (ا ج - ب^۲) لا^۲ + ج^۲

ا ب لا^۳ - ب^۲ لا^۲ + ب ج لا

ا ج لا^۲ - ب ج لا + ج^۲

ا ج لا^۲ - ب ج لا + ج^۲

(۳) شمارکنندہ کو ۷ میں ضرب دو

۷ لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۲۱ لا + ۱۲) ۳۵ لا^۴ + ۱۴ لا^۳ - ۱۰۵ لا^۲ - ۴۲ لا (۵

۳۵ لا^۴ - ۲۰ لا^۳ - ۱۰۵ لا^۲ + ۶۰ لا

۳۴ لا^۳ - ۱۰۲ لا

۳۴ پر تقسیم کرو تو لا^۲ - ۳) ۷ لا^۳ - ۴ لا^۲ - ۲۱ لا + ۱۲ (۷ لا - ۴

۷ لا^۳ - ۲۱ لا

- ۴ لا^۲ + ۱۲

- ۴ لا^۲ + ۱۲

(۱۳) لا۲ + ۵ لا + ۶) لا۳ + ۹ لا۲ + ۸ لا (لا
لا۳ + ۵ لا۲ + ۶ لا
لا + ۲) لا۲ + ۵ لا + ۶ (لا + ۳
لا۲ + ۲ لا
۳ لا + ۶
۳ لا + ۶

لا + ۲ مقسوم علیہ اعظم ہے

(۱۴) ۱۲ لا۲ + ۳۱ لا ی + ۲۰ ی۲ = (۳ لا + ۴ ی) (۴ لا + ۵ ی) پس (۳ لا + ۴ ی) (۴ لا + ۵ ی) نسب نما مشترک ہے

(۱۵) (لا − ۲) (لا − ۳) + ۲ (لا − ۱) (لا − ۳) = ۳ (لا − ۱) (لا − ۲) وغیرہ

(۱۶) مساواتون کو جمع کرو اور ۱۴ پر تقسیم کرو تو لا − ر = ۵ اور مساواتون کو تفریق کرو اور ۲ پر تقسیم کرو تو لا + ر = ۷ پس جمع و تفریق کرنی سے مطلب حاصل ہے

(۱۷) ۹ بجے کے بعد فرض کرو لا منٹ گذری تھی تو لا منٹ مین گھنٹون کی بڑی سوئی چلنے پر لا حصے طے کریگی اور یعنی سوئی چھوٹی سوئی سے بالکل چلتی ہے تو چھوٹی سوئی $\frac{لا}{۱۲}$ حصے لا منٹ مین طے کریگی اور ۹ بجے چھوٹی سوئی سے ۴۵ حصے آگے یعنی سوئی ہے اسلئے لا = $\frac{لا}{۱۲}$ + ۴۵ اسواسطے ۱۱ لا = ۱۲ × ۴۵ لا = ۴۹ $\frac{۱}{۱۱}$

(۱۸) فرض کرو کہ موہن اکیلا کام کو لا دن مین اور سوہن ر دن مین تیار کر لیتا ہے تو موہن کام کے $\frac{۳۰}{لا}$ حصے ۳۰ دن مین بنائیگا

اسیواسطے $\frac{۳۰}{لا}$ = $\frac{۳}{۵}$ اور اسی طرح $\frac{۱}{لا}$ + $\frac{۱}{ر}$ = $\frac{۲}{۵}$

(۱۹) ۴ لا۲ − لا (۱۲ ر − ۴ ی) + ۹ ر۲ − ۶ ر ی + ی۲ (۲ لا − ۳ ر − ی)
۴ لا۲
۴ لا − (۳ ر − ی)) − لا (۱۲ ر − ۴ ی) + ۹ ر۲ − ۶ ر ی + ی۲
− لا (۱۲ ر − ۴ ی) + ۹ ر۲ − ۶ ر ی + ی۲

(۲۰) ۳ (لا − ۳) − (لا − ۱) (لا − ۴) = (لا − ۱) (لا − ۳) عمل آگے آسان ہے

اور اسکی تحویل اور اختصار یہہ ہوتا ہے کہ ۸۴ لا + ۱۲ = ۱۴۴ − ۱۴۴ لا + ۳۶

(۴۶) دوسری مساوات کو ۲ میں ضرب دو اور اول پر جمع کرو تو ۵۸ لا − ۲۹ ی − ۲۹ = ۰

۲۹ پر تقسیم کرو تو ۲ لا − ی − ۱ = ۰ پہر دوسری مساوات کو ۳ میں ضرب دو اور تیسری پر جمع کرو

(۴۷) فرض کرو کہ بوتلوں کی تعداد لا ٹہری تو ملاؤ کا گلاب ۱۲ (لا + ۸۰) اونس کو فروخت ہوا اسواسطے ۱۲ (لا + ۸۰) = ۱۵ × ۸۰ (۱ + ۲۰/۱۰۰)

(۴۸) فرض کرو کہ موہن کام کو لا دنوں اور سوہن ی دنوں میں اور راداہی ع دنوں میں علیحدہ علیحدہ

تو ۱/لا + ۱/ی = ۱/۱۲ اور ۱/لا + ۱/ع = ۱/۱۵ اور ۱/ی + ۱/ع = ۱/۲۰ جمع کرنے سے

۲ (۱/لا + ۱/ی + ۱/ع) = ۱/۵ اسواسطے ۱/لا + ۱/ی + ۱/ع = ۱/۱۰ پس موہن اور سوہن اور رادہا

تینوں مل کر کام کا ۱/۱۰ حصہ بناتے ہیں اسواسطے کل کام ۱۰ دن میں بنا دینگے

(۴۹) فرض کرو کہ √لا + √ی جذر ہے تو بموجب دفعہ ۱۰۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا + ی = ا − ح اور √لا ی = √(اب + ب ح − ا ح − ب^۲)

اسیواسطے (لا − ی)^۲ = (ا − ح)^۲ − ۴ (اب + ب ح − ا ح − ب^۲) = (۲ ب − ا − ح)^۲

(۵۰) ۴ − ۳/(۴ − لا) = (۱۶ − ۴ لا − ۳)/(۴ − لا) = (۱۳ − ۴ لا)/(۴ − لا) اور ۳ ÷ (۱۳ − ۴ لا)/(۴ − لا) = (۱۲ − ۳ لا)/(۱۳ − ۴ لا)

۴ − (۱۲ − ۳ لا)/(۱۳ − ۴ لا) = (۵۲ − ۱۶ لا − ۱۲ + ۳ لا)/(۱۳ − ۴ لا) = (۴۰ − ۱۳ لا)/(۱۳ − ۴ لا)

۳ ÷ (۴۰ − ۱۳ لا)/(۱۳ − ۴ لا) = (۳۹ − ۱۲ لا)/(۴۰ − ۱۳ لا) پس لا = (۳۹ − ۱۲ لا)/(۴۰ − ۱۳ لا)

اسیواسطے ۱۳ لا^۲ − ۵۲ لا + ۳۹ = ۰ اسیواسطے لا^۲ − ۴ لا + ۳ = ۰

(۵۱) جملہ پر جب عمل کیا جائیگا تو لا کا سر ا + ب + ح + ب − ح − (ب + ح − ا) + ح + ا − ب

یعنی ۲ ا ہے اسی طرح ی کا سر اور ی کا دریافت کرو

(۵۲) (ص − ا + ص − ب)^۳ = (ص − ا)^۳ + (ص − ب)^۳ + ۳ (ص − ا) (ص − ب) (ص − ا + ص − ب)

اور ص − ا + ص − ب = ۲ ص − ا − ب = ح

(لا-۵)(لا-۴)(-لا^۲+۱۲لا-۲۴) = (لا-۶)(لا-۳)(-لا^۲+۱۲لا-۲۶)

یعنی (لا^۲-۹لا+۲۰)(-لا^۲+۱۲لا-۲۴) = (لا^۲-۹لا+۱۸)(-لا^۲+۱۲لا-۲۶)

اسیواسطے (لا^۲-۹لا)(-لا^۲+۱۲لا) + ۲۰(-لا^۲+۱۲لا) - ۲۴(لا^۲-۹لا) - ۲۰×۲۴

= (لا^۲-۹لا)(-لا^۲+۱۲لا) + ۱۸(-لا^۲+۱۲لا) - ۲۶(لا^۲-۹لا) - ۱۸×۲۶

اسیواسطے ۲(-لا^۲+۱۲لا) + ۲(لا^۲-۹لا) = ۲۰×۲۴ - ۱۸×۲۶

(۶۶) کسور کو دور کرو اور سادہ کرو تو مساواتون کی صورت یہہ ہو جائیگی

ب لا - ا ی = ۰ اور ۲ب لا - ا ی = ا ب

(۶۷) فرضکرو کہ مکان لا روپیہ کو خریدا تہا تو کل لا + ۱/۲۵ لا یعنی ۲۶لا/۲۵ روپیہ اوسکا صرف ہوا اور مکان کے خالی رہنی سی جو نقصان سمجہا گیا ۲۶لا/۲۵ × ۵/۱۰۰ روپیہ تہا لیس ۱۱۹۲ - ۲۶لا/۲۵ - ۲۶لا/۲۵ × ۵/۱۰۰ نفع ہے اور اسیواسطے یہہ برابر ہے ۱/۲۰ لا کے

(۶۸) فرض کرو کہ اول دفعہ مین لا رای موافق اور ی مخالف تہین تو

لا - ی = ۱/۳ ی اور لا - ۱۰ - (ی + ۱۰) = ۱

(۶۹) منتقل کرو اور مجذور کرو لا - ۲√(لا ا + ا) = لا + ا - ب - ۲√(ب(لا + ا - ب)) + اب

اسیواسطے √(لا ا) = √(ب (لا + ا - ب)) مجذور کرو لا ا = ب (لا + ا - ب)

اسیواسطے لا (ا - ب) = ب (ا - ب)

(۷۰) یہہ مساوات معمولی قاعدہ سے حل ہو سکتی ہے یا اسکو اسطرح لکہین کہ

(لا-۲)(لا-۳) = (۲ + ۱/۲۲)(۱ + ۱/۲۲) اب یہہ ظاہر ہے کہ ایک حل لا - ۲ = ۲ + ۱/۲۲ ہے یعنی لا = ۴ ۱/۲۲ اور چونکہ قیمتونکا مجموعہ ۵ ہے تو دوسری قیمت ۶۷/۲۲ ہو گی دفعہ ۳۳۶ دیکہو

(۷۱) ∛[۲(۳-۶+۲)] + ∛[(۲۴-۲۵)(۵+۳)] + ∛[(۳-۵)(۲-۶)]

= ∛۱۲۵ + ∛۸ + ∛۸ = ۵ + ۲ + ۲ = ۹

(۷۲) ہر یک جملہ = لا(لا^۲ + ی^۲) + ی(ی^۲ + لا^۲) + ی(لا^۲ + ی^۲) + ۲ لا ی

(۷۳) اول جملہ کو ۴ میں ضرب دو

۴ لا^۴ − ۱۵ لا^۳ − ۳۸ لا + ۶۵) ۲۰ لا^۴ − ۷۶ لا^۳ + ۲۲۰ لا − ۱۷۰۰ (۵

۲۰ لا^۴ − ۷۵ لا^۳ − ۱۹۰ لا + ۳۲۵

− لا^۳ + ۴۱۰ لا − ۲۰۲۵

یعنے مقسوم علیہ کی علامت بدلو لا^۳ − ۴۱۰ لا + ۲۰۲۵) ۴ لا^۴ − ۱۵ لا^۳ − ۳۸ لا + ۶۵ (۴ لا

۴ لا^۴ − ۱۶۴۰ لا^۲ + ۸۱۰۰ لا

۱۶۲۵ لا^۲ − ۸۱۳۸ لا + ۶۵

۱۳ پر تقسیم کرو اور قیمت کو جاری رکھو

۱۲۵ لا^۲ − ۶۲۶ لا + ۵

۱۲۵ لا^۲ − ۵۱۲۵۰ لا + ۲۵۳۱۲۵

۵۰۶۲۴ لا + ۲۵۳۱۲۵

۵۰۶۲۴ پر تقسیم کرو لا − ۵) لا^۳ − ۴۱۰ لا + ۲۰۲۵ (لا^۲ − ۴۰۵

لا^۳ − ۵ لا^۲

− ۴۰۵ لا + ۲۰۲۵

− ۴۰۵ لا + ۲۰۲۵

پس لا − ۵ مقسوم علیہ اعظم ہے

(۷۴) نسب نما متحد (ا − ب)(ب − ح)(ح − ا) بنا و تو شمار کنندہ

(ح − ب) ب ح (لا − ا)^۲ + (ا − ح) ح ا (لا − ب)^۲ + (ب − ا) ا ب (لا − ح)^۲

یعنی لا^۲ [(ح − ب) ب ح + (ا − ح) ح ا + (ب − ا) ا ب] یعنے لا^۲ (ا − ب)(ب − ح)(ح − ا)

(۷۵) محدود کرو کہ (لا − ا)^۲ + ۲ ا ب + ب^۲ = (لا − ا)^۲ + ۲ ب (لا − ا) + ب^۲

اسواسطے ۲ ا ب = ۲ ب (لا − ا) اسواسطے لا = ۲ ا

(۷۶) ا لا + ح ء + ب ی = ھ اور ح لا + ب ء + ا ی = ھ اور ب لا + ا ء + ح ی = ھ

اسمین ھ بجای ا۲ + ب۲ + ح۲ − ۳ ا ب ح کے ہی دوم مساوات کو اول سے تفریق کرو اور سوم مساوات کو دوم مساوات مین سے تو

(ا − ح) لا + (ح − ب) ء + (ب − ا) ی = ۰ اور (ح − ب) لا + (ب − ا) ء + (ا − ح) ی = ۰

اسے معلوم ہوا کہ لا ÷ {(ح − ب)(ا − ح) − (ب − ا)۲} = ء ÷ {(ب − ا)(ح − ب) − (ا − ح)۲} = ی ÷ {(ا − ح)(ب − ا) − (ح − ب)۲}

دفعہ ۳۸۵ دیکھو ان تینون نسب نمایون مین سے ہر ایک کی تحویل ا ب + ب ح + ح ا − ا۲ − ب۲ − ح۲ کے طرف ہوتی ہے پس لا = ء = ی پس انکو ایک مساوات مین مندرج کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(ا + ب + ح) لا = ا۳ + ب۳ + ح۳ − ۳ ا ب ح تقسیم ا + ب + ح پر کرو تو

لا = ا۲ + ب۲ + ح۲ − ب ح − ح ا − ا ب

(۷۷) چکر کا دور ۱ میل کا فرض کرو تو زید ۱۳ میل نصف گہنٹہ مین چلا یعنی ۲۶ میل فی گہنٹہ کی چال سے چلا اور اسی طرح بکر ۱۹ میل فی گہنٹہ کی چال سے چلا اور نصف گہنٹے کے اخر مین زید ۳/۲ میل اگے بکر سے تہا فرض کرو کہ بکر زید کو لا گہنٹہ مین پکڑتی ہے تو ۱۹ × لا = ۳/۲ + ۱۶ × لا

پس ۳ لا = ۳/۲ اسواسطے لا = ۱/۲

(۷۸) فرض کرو کہ پیر کے دن مچھلیون کی قیمت لا پنس ہے اور ر پنس دوسرے دن تو ۲۴/۱۲ لا تعداد اون درختون کی ہے جو ایک سورن کو پیر کے دن خریدی جائین اور ۱۲/ر اون مچھلیون کی تعداد ہے جو دوسرے دن ایک شلنگ کو خریدی جائین اسواسطے ۱۲/ر = ۲ × ۲۴۰/۱۲ لا اور ۱۰ لا + ۱۰ ر = ۲۶

(۷۹) ہم کو معلوم ہے کہ (ع + ق)۳ = ع۳ + ق۳ + ۳ ع ق (ع + ق) پس یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لا۳ = ا + ∛(ا۲ + ب۲) + ا − ∛(ا۲ + ب۲) + ۳ لا ∛((ا + ∛(ا۲ + ب۲))(ا − ∛(ا۲ + ب۲)))

$\frac{۴لا^۳}{۱-لا^۴} - \frac{۴لا^۳}{۱+لا^۴} = \frac{۸لا^۷}{۱-لا^۸}$ اور $\frac{۸لا^۷}{۱-لا^۸} - \frac{۸لا^۷}{۱+لا^۸} = \frac{۱۶لا^{۱۵}}{۱-لا^{۱۶}}$

(۸۵) کسر دور کرو یا اسطرح عمل کرو کہ

$۲لا + \frac{۲لا^۲+۱}{لا^۳+۲لا^۲+۲لا+۳} = ۲لا + \frac{۱}{لا+۱}$ اسیواسطے $\frac{۲لا^۲+۱}{لا^۳+۲لا^۲+۲لا+۳} = \frac{۱}{لا+۱}$

اسیواسطے $(لا^۲+۱)(۲لا+۱) = ۲لا^۳+۲لا+۳$

(۸۶) اول مساوات کو ب ح + ح ا + ا ب مین اور دوسرے مساوات کو ا + ب + ح مین

اور تفریق کرو تو $(ا^۲ - ب ح)$ لا + $(ب^۲ - ح ا)$ ء + $(ح^۲ - ا ب)$ ی = ۰

اس کو تیسرے مساوات معلوم کے ساتھہ شامل کرو پس بموجب دفعہ ۳۸۵

$\frac{لا}{(ب+ح) صہ} = \frac{ء}{(ح+ا) صہ} = \frac{ی}{(ا+ب) صہ}$

اسمین صہ بجای $ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ - ب ح - ح ا - ا ب$ کے ہے پس یہہ سادی صورت حاصل ہوگئی

$\frac{لا}{ب+ح} = \frac{ء}{ح+ا} = \frac{ی}{ا+ب}$ = ک کے فرض کرو

قیمت کو اول مساوات معلوم مین مندرج کرو تو ک = $\frac{۱}{۲}$

(۸۷) فرض کرو کہ کمپنی کا سرمایہ لا روپیہ ہی تو جو مقدار رونکو نفع کا حصہ تقسیم ہوا $\frac{۵ لا}{۱۰۰} + \frac{۲}{۱۰۰} \times$ ۴۰۰۰۰ روپیہ ہی اور یہہ برابر ہونا چاہیے $\frac{۶}{۱۰۰}$ (لا + ۴۰۰۰۰)

(۸۸) فرض کرو کہ وہ شخص لا میل فی گھنٹہ پہاڑ کی چڑہائی پر چڑہتا ہی اور ء میل فی گھنٹہ ہموار زمین پر چلتا ہے اور ی میل فی گھنٹہ پہاڑ سے اترتا ہے

تو $\frac{۵}{لا} + \frac{۴}{ء} + \frac{۶}{ی} = ۳\frac{۳۶}{۱۵}$ اور $\frac{۶}{لا} + \frac{۴}{ء} + \frac{۵}{ی} = ۴$ اور

جب وہ مقام ب کے طرف ادہی دور جاکر اولٹا چلا آتا ہی تو وہ ۵ پانچ میل پہاڑ پر چڑہتا ہے

اور ۲$\frac{۱}{۲}$ میل ہموار زمین پر اور ۵ میل پہاڑ پرسی اترتا ہی اسلئی $\frac{۵}{لا} + \frac{۴}{ء} + \frac{۵}{ی} = ۳\frac{۱۱}{۱۲}$

اول مساوات کو دوم مساوات مین سی تفریق کرو تو $\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{ی} = \frac{۲}{۱۵}$ پہر دوسرے مساوات کو ۵ مین ضرب دو اور تیسرے مساوات کو ۴ مین اور تفریق کرو تو

$\frac{۱}{لا} + \frac{۵}{ی} = ۴\frac{۱}{۳}$

(۸۹) [√۱۹۳۶۰ + ۱۶۱]^½ = [(√۱۹۳۶۰ − ۱۶۱) / (۱۹۳۶۰ − (۱۶۱)²)]^½ = [(√۱۹۳۶۰ − ۱۶۱) / (−۶۵۶۱)]^½

= ۱/۸۱ [√۱۹۳۶۰ − ۱۶۱]^½ = ۱/۸۱ [√۴۰ − ۱۱] دفعہ ۱۰۳ دیکھو

(۹۰) ا (لا + ب − ح) + ب (لا + ا − ح) = ۲ (لا + ا − ح) (لا + ب − ح) اسیواسطے

۲ لا² + لا (ا + ب − ۴ح) = −۲ح² + (ا + ب) ح اسیواسطے

لا² + لا (ا + ب − ۴ح)/۲ + ((ا + ب − ۴ح)/۴)² = −ح² + (ا + ب) ح/۲ + (ا + ب − ۴ح)²/۱۶ = (ا + ب)²/۱۶

اسیواسطے لا + (ا + ب − ۴ح)/۴ = ± (ا + ب)/۴

(۹۱) ۳لا − [۵ی − [۲لا − (۳ی − ۳ی) + ۲ی − (لا − ۲ی − ی)]]

= ۳لا − [۵ی − [۲لا − ۳ی + ۳ی + ۲ی − لا + ۲ی + ی]]

= ۳لا − [۵ی − (لا + ۵ی)] = ۳لا − [۵ی − لا − ۵ی] = ۳لا + لا = ۴لا = ۲۰

(۹۲) جملون پر معمولی عمل کرنے سے مطلب حاصل ہوجاۓگا یا اسطرح عمل کرو کہ مثال ۱۰ کی موافق

اگر ع + ق + ر = ۰ تو ع² + ق² + ر² = ۲ق²ر² + ۲ر²ع² + ۲ع²ق²

پس انمین سے ہر یک برابر دونو کے نصف مجموعہ کے برابر ہوگا یعنی ½[ع² + ق² + ر² + ۲ق²ر² + ۲ر²ع² + ۲ع²ق²]

یعنی ½(ع² + ق² + ر²)² پس اگر ہم ع = لا − ی اور ق = ی − ی اور ر = ی − لا

مان لے تو ع + ق + ر = ۰ اور ع² + ق² + ر² = ۲ (لا² + ی² + ی² − ی ی − ی لا − لا ی)

پس مدعا ثابت ہوگیا

(۹۳) لا² + (م − ۳) لا − ۶م) لا³ + (۵م − ۳) لا² − (۲م² + ۳م) لا + ۶م² (لا − ۲م

لا³ + (م − ۳) لا² − (۳م − ۲م²) لا

۴م لا² + (۸م − ۱۲م) لا − ۲۴م²

۴م پر تقسیم کرو لا² + (۲م − ۳) لا − ۶م) لا³ + (م − ۳) لا² − (۳م² + ۳م) لا + ۶م² (لا − م

لا³ + (۲م − ۳) لا² − ۶م لا

− م لا² − (۲م² − ۳م) لا + ۶م²

− م لا² − (۲م² − ۳م) لا + ۶م²

پس لا² + (۲م − ۳) لا − ۶م یعنی (لا − ۳) (لا + ۲م) مقسوم علیہ اعظم ہے

(۹۴) کسر معلوم = [ا^۳ (ج − ب) + ب^۳ (ا − ج) + ج^۳ (ب − ا)] / [ا^۲ (ج − ب) + ب^۲ (ا − ج) + ج^۲ (ب − ا)] اور نسب نما معلوم ہی کہ برابر ہے (ا − ب) (ب − ج) (ج − ا) اور شمار کنندہ برابر (ا − ب) (ب − ج) (ج − ا) (ا + ب + ج)

اور یہہ تو تقسیم اللامرین عمل کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے یا دفعہ ۸۰۳ کے ترکیب سے

(۹۵) کسور کو دور کرو تو ۴ (لا − ۱)^۵ = ۰

(۹۶) لا − ا اور ی − ب اور ی − ج کے قیمت کو بر سے تعبیر کرو تو

لا = بر + ا اور ی = بر + ب اور ی = بر + ج اسکو اول مساوات میں مندرج کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

(بر + ا)^۳ + (بر + ب)^۳ + (بر + ج)^۳ = ۳ (بر + ا) (بر + ب) (بر + ج)

اور اسکا اختصار یہہ ہوتا ہے کہ ۳ بر (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ − ب ج − ج ا − ا ب) = ۳ ا ب ج − ا^۳ − ب^۳ − ج^۳

اسواسطے بر = −⅓ (ا + ب + ج)

(۹۷) فرض کرو کہ سکس پنس کی تعداد کو لا اور شلنگ کے تعداد کو ی اور ہاف کرون کی تعداد کو ی تعبیر کرتا ہے،

تو لا + ی + ی = ۱۰۲ اور لا = ۲ی = ۵ی

(۹۸) فرض کرو کہ مقام ا سے مقام ب تک لا میل کا فاصلہ اور مقام ب سے مقام س تک ی میل کا فاصلہ ہے،

تو لا/۳½ + ی/۴½ گھنٹوں کی تعداد ہے جسمین وہ چلا اور یہہ برابر ہے (لا + ی)/۳¾

اور یہہ ی/۳⅓ + لا/۴½ + ۱۳/۶۰ پس ۲لا/۷ + ی/۴½ = ۴ (لا + ی)/۱۵ = ۴ی/۱۵ + لا/۴½ + ۱۳/۶۰

اسواسطے ۲لا/۱۵ = لا/۴½ + ۱۳/۶۰ اسواسطے لا = ۱۴

(۹۹) لا^۳ + ی^۳ + ی^۳ − ۳لا ی ی = (لا + ی + ی) (لا^۲ + ی^۲ + ی^۲ − ی ی − ی ی − لا ی)

اب لا + ی + ی = (ا + ب + ج) (لا^۲ + ی^۲ + ی^۲) پس ۸۲ مثال کے امداد سے نتیجہ مطلوب حاصل ہو جائیگا

(۱۰۱) (۴لا + ۲)^۴ − (۲لا + ۴)^۴ = (۳لا − ۱)^۴ − (لا − ۳)^۴

اب (۴لا + ۲)^۴ − (۲لا + ۴)^۴ = [(۴لا + ۲)^۲ + (۲لا + ۴)^۲] [(۴لا + ۲)^۲ − (۲لا + ۴)^۲]

= [(۴لا + ۲)^۲ + (۲لا + ۴)^۲] [۴لا + ۲ + ۲لا + ۴] [۴لا + ۲ − ۲لا − ۴]

(۱۱۸) اول فرض کرو کہ ر بڑا م سے نہیں ہے تو سر مطلوب وہ ہوگا کہ (ن ـ م + ۱) لا (۱ ـ لا) / (۱ ـ لا)^۲ کی صورت مفصلہ سے پیدا ہوگا یعنے (ن ـ م + ۱) لا (۱ ـ لا)^-۱ اسکے صورت مفصلہ سے سو اسطی سر ن ـ م + ۱ ہے دوم فرض کرو کہ ر درمیان م + ۱ اور ن + ۱ واقع ہے اور سمین یہہ دونو داخل ہین تو علاوہ ن ـ م + ۱ کے ہم کو لا^(م+۱) / (۱ ـ لا)^۲ کی صورت مفصلہ سے سر دریافت کرنا ہے یعنے ـ لا^(م+۱) (۱ ـ لا)^-۲ کے صورت مفصلہ سے

یعنے ـ (ر ـ م) بموجب فقرہ ۲۱۵ کے سیواسطے کل سر ن ـ م + ۱ ـ (ر ـ م)

یعنے ن ـ ر + ۱ ہے آخر یہہ فرض کرو کہ ر بڑا ن + ۱ سے ہے تو علاوہ ن ـ ر + ۱ کے جسکو ابہی دریافت کیا ہے ہم کو لا^(ن+۲) / (۱ ـ لا)^۲ کی صورت مفصلہ سے سر دریافت کرنا ہے یعنی لا^(ن+۲) (۱ ـ لا)^-۲ کی صورت مفصلہ سے یعنی ر ـ ن + ۱ بموجب فقرہ ۲۱۵ کی سیواسطی کل سر

ن ـ ر + ۱ + ر ـ ن ـ ۱ یعنے صفر ہے

(۱۱۹) √(ن^۲ + ۱) ـ ن = [√(ن^۲ + ۱) ـ ن] × (√(ن^۲ + ۱) + ن) / (√(ن^۲ + ۱) + ن) = ۱ / (√(ن^۲ + ۱) + ن)

اور یہہ بڑا ۱ / ۲(ن + ۱) سے ہی اور سیواسطی بڑا ۱ / ۲(ن + ۱) سے ہے اسسے معلوم ہوا کہ سلسلہ مفروض بڑا ۱/۲ [۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ...] سے ہے اور سیواسطی بموجب فقرہ ۵۶۲ کے انفراجی ہے

(۱۲۰) لوک ۱ / (۵۰ر۱)^۱۳ = ـ ۱۳ لوک ۵۰ر۱ = ـ ۱۳ × ۰۲۱۱۸۹۳ر = ـ ۰۹۲۷۵۴۰۹ر
= ـ ۱ + ۷۲۴۵۹۱ر = لوک ۵۳۰۳۲۱۴ر

لوک ۱ / (۵۰ر۱)^۲۰ = ـ ۲۰ لوگ ۵۰ر۱ = ـ ۲۰ × ۰۲۱۱۸۹۳ر = ـ ۴۲۳۷۸۶ر
= ـ ۱ + ۵۷۶۲۱۴ر = لوگ ۳۷۶۸۸۹ر

پس ۱/۵۰ر [۵۳۰۳۲۱۴ر ـ ۳۷۶۸۵۹۴ر] = ۲۰ × ۱۵۳۴۳۲ر = ۰۶۸۶۴ر۳

(۱۲۱) انتقال اور مجذور کرنے سے

۴ + ۵لا ـ لا^۲ ـ ۲(۴ + ۵لا ـ لا^۲)^½ (لا^۲ + ۳لا ـ ۴)^½ + لا^۲ + ۳لا ـ ۴ = ۸لا

اسیواسطے $(۴ + ۵ لا - لا^۲)^{\frac{۱}{۲}} (لا^۲ + ۳ لا - ۴)^{\frac{۱}{۲}} = ۰$

اسیواسطے یا تو $۴ + ۵ لا - لا^۲ = ۰$ یا $لا^۲ + ۳ لا - ۴ = ۰$

(۱۲۲) فرض کرو کہ صہ ایک قیمت کو اور ۲ صہ دوسری قیمت کو تعبیر کرتا ہے تو $ا صہ^۲ + ب صہ + ح = ۰$

اور $۴ ا صہ^۲ + ۲ ب صہ + ح = ۰$ اسیواسطے تفریق کرنے سے $۳ ا صہ^۲ + ب صہ = ۰$ اسیواسطے

$صہ = - \frac{ب}{۳ا}$ اس قیمت صہ کو مندرج کرو تو $\frac{۲ب^۲}{۹ا} - \frac{ب^۲}{۳ا} + ح = ۰$ اسیواسطے

$$۲ب^۲ = ۹ اح$$

(۱۲۳) $\frac{لا+ی}{۱۲} = \frac{۷}{لا+ی+۵}$ اسیواسطے $(لا+ی)^۲ + ۵(لا+ی) = ۸۴$ اس سے یہہ حاصل

ہوتا ہے کہ $لا + ی = ۷$ یا -۱۲ پہر $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ی} = \frac{لا+ی}{۱۲}$ اسیواسطے $لا ی = ۱۲$

(۱۲۴) فرض کرو کہ لا اور د اور ی تین حصے ہیں تو $\frac{لا د}{۴} = \frac{د ی}{۵} = \frac{ی لا}{۶}$ اور

$لا + د + ی = ۱۱۱$ پس $لا = \frac{۴ی}{۵}$ اور $د = \frac{۵لا}{۶} = \frac{۲ی}{۳}$ انکو مندرج کرو تو

$$\frac{۴ی}{۵} + \frac{۲ی}{۳} + ی = ۱۱۱$$

(۱۲۵) دفعہ ۳۴۵ دیکھو ان کی دونو قیمتیں مثبت ہونی چاہئے پس قیمتوں کا مجموعہ اور فرق دونو کیا جفت صحیح اعداد ہونگے یا دونو طاق صحیح اعداد ہونگے اسیواسطے $ب - \frac{۱۲}{ب}$ ایک مثبت صحیح عدد ہونا چاہئے اور $(ب - \frac{۱۲}{ب})^۲ + \frac{۴۸}{ب}$ ایک مثبت صحیح مجذور ہونا چاہئے اور ایک مجذور کامل ہو اور اسکے دونو صحیح اعداد جفت ہونی چاہئے یا دونو طاق اور اول صحیح کا مجذور بڑا دوسرے کے مجذور سے ہونا چاہئے

(۱۲۶) ہم کو اس سلسلہ $\frac{۱}{د} + \frac{۱}{در} + \frac{۱}{در^۲}$ کی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کرنا ہے

اور یہہ مجموعہ $= \frac{۱}{د} \cdot \frac{۱ - \frac{۱}{ر^ن}}{۱ - \frac{۱}{ر}} = \frac{ر^ن - ۱}{در^{ن-۱}(ر-۱)}$

(۱۲۷) ہم اول ادس آدمی کو ن چیزیں $\frac{م ن (م ن - ۱) \cdots (م ن - ن + ۱)}{|ن}$ طوروں سے دے سکتے ہیں تو م ن - ن چیزیں باقی رہیں انہیں سے ن چیزیں دوسرے آدمی کو $\frac{(م ن - ن)(م ن - ن - ۱) \cdots (م ن - ۲ن + ۱)}{|ن}$ طوروں سے دے سکتے ہیں اور علی ہذالقیاس

(۱۳۲) فرض کرو کہ سہ اور صہ قیمتین ہون سہ + صہ = ب/د اگر سہ اور صہ ایک ہی علامت رکہین تو وہ علامت ب/د کی ہوگی اور اگر سہ و صہ کی مختلف علامتین ہون تو دونون مین جو تعداداً بڑا ہوگا اوسکی علامت ب/د ہوگی اور ایسی ہی ۱/سہ + ۱/صہ = ب/ج پس ب/ج کی علامت وہی ہے جو اوسکی علامت ہے کہ دونو ۱/سہ اور ۱/صہ مین سے تعداداً بڑا ہے یعنی وہی علامت ہے جو اوسکی علامت ہے کہ دونو سہ اور صہ مین سے تعداداً چہوٹا ہے

(۱۳۳) فرض کرو کہ لا − ا = طر اور ۶ − ب = بر اور ی − ح = مر پس ان کو لا اور ۶ اور ی کی جگہہ رکہو تو یہہ حاصل ہوگا کہ طر + بر + مر = ۰ اور طر/ا + بر/ب + مر/ح = ۰ اور طر² + بر² + مر² + ۲ طر ا + ۲ بر ب + ۲ مر ح = ۰ اول اور دوسری مساواتون سے بموجب فقرہ ۳۸۵ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ طر/(۱/ح − ۱/ب) = بر/(۱/ا − ۱/ح) = مر/(۱/ب − ۱/ا) = ک اسکو آخر مساوات مین مندرج کرو تو

ک² [(ب − ح)²/(ب² ح²) + (ح − ا)²/(ا² ح²) + (ا − ب)²/(ا² ب²)] + ۲ ک [ا(ب − ح)/(ب ح) + ب(ح − ا)/(ح ا) + ح(ا − ب)/(ا ب)] = ۰

اسواسطے ک = ۰ یا ک = −۲ ا ب ح [ا²(ب − ح) + ب²(ح − ا) + ح²(ا − ب)] / [ا²(ب − ح)² + ب²(ح − ا)² + ح²(ا − ب)²]

(۱۳۴) فرض کرو کہ زید نے لا ہاف کرون اور ۶ شلنگ اور ی سکس پنس لئے اور بکر نے طر ہاف کرون اور بر شلنگ اور مر سکس پنس لئے تو

۵ لا + ۲ ۶ + ی = ۵ طر + ۲ بر + مر اور ۵(لا + طر)/۱۵ = ۲(۶ + بر)/۴ = (ی + مر)/۱ = ک فرض کرو لا + ۶ + ی = ۶۰ اور طر + بر + مر = ۶۰ اور لا = طر + ۲

پس لا + طر = ۳ ک اور ۶ + بر = ۲ ک اور ی + مر = ک اسواسطے

لا + ۶ + ی + طر + بر + مر = ۶ ک یعنی ۱۲۰ = ۶ ک پس ک = ۲۰ اسی معلوم ہوا کہ

لا + طر = ۶۰ اور لا − طر = ۲ اسیواسطے لا = ۳۱ اور طر = ۲۹ اور

(۱۳۵) ہم کو یہہ معلوم ہے کہ ۱/ق = ا + (ع − ۱) ب اور ۱/ح = ا + (ق − ۱) ب

تفریق کرنے سے $\frac{1}{ق} - \frac{1}{ع} = (ع - ق)\,ب$ اسیواسطے $ب = \frac{1}{ع\,ق}$ اب اس ب کے قیمت کو مندرج کرو تو $\frac{1}{ق} = ا + \frac{ع-1}{ع\,ق}$ اسیواسطے $ا = \frac{1}{ع\,ق}$ پس ن رقموں کا مجموعہ $= \frac{ن}{2}(ن+1)\frac{1}{ع\,ق}$ اور یہہ $= \frac{ع\,ق+1}{2}$ اگر $ن = ع\,ق$

(۱۳۶) ہمکو معلوم ہے کہ $ب = \frac{ا+ج}{2}$ اور $صہ = \frac{2\,سہ\,لہ}{سہ+لہ}$ اور $\frac{سہ}{لہ} + \frac{لہ}{سہ} = \frac{ا}{ج} + \frac{ج}{ا}$ اسے معلوم ہوا کہ $(ب\,صہ)^2 = \frac{(ا+ج)^2\,سہ^2\,لہ^2}{(سہ+لہ)^2}$ لیکن $\frac{سہ^2 + لہ^2}{سہ\,لہ} = \frac{ا^2+ج^2}{ا\,ج}$ اسیواسطے $\frac{(سہ+لہ)^2}{سہ\,لہ} = \frac{(ا+ج)^2}{ا\,ج}$ اسیواسطے $\frac{(ا+ج)^2}{(سہ+لہ)^2} = \frac{ا\,ج}{سہ\,لہ}$ پس

$$(ب\,صہ)^2 = ا\,ج\,سہ\,لہ$$

(۱۳۷) اب تین حروف صحیح مین سے ۲ حرف لو اور ایک کو لفظ کے اول مین اور دوسرے کو لفظ کے آخر مین رکھو تو ایسی ۶ صورتین پیدا ہونگی اب باقی حرف مین $\underline{|6}$ ترتیبین بنینگی پس کل الفاظ $6\ \underline{|6}$ ہوئے

(۱۳۸) ہم کو معلوم ہے کہ $(1+لا)^{2ن} = ا_. + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \dots$

$$\left(1 - \frac{1}{لا}\right)^{2ن} = ا_. - \frac{ا_1}{لا} + \frac{ا_2}{لا^2} + \frac{ا_3}{لا^3} + \dots$$

پس $ا_.^2 - ا_1^2 + ا_2^2 - ا_3^2 + \dots$ ایک ایسی رقم $(1+لا)^{2ن}$ اور $\left(1-\frac{1}{لا}\right)^{2ن}$ کے حاصلضرب مین ہے کہ جسمین لا شامل نہین ہے اور

$$(1+لا)^{2ن} \times \left(1 - \frac{1}{لا}\right)^{2ن} = \frac{(لا+1)^{2ن}(لا-1)^{2ن}}{لا^{2ن}} = \frac{(لا^2-1)^{2ن}}{لا^{2ن}}$$

پس جس رقم مین کہ لا شامل نہین ہے وہ صورت مفصلہ $(لا^2-1)^{2ن}$ مین $لا^{2ن}$ کا ضریب ہے اور یہہ $\frac{(-1)^ن\,\underline{|2ن}}{\underline{|ن}\,\underline{|ن}}$ ہے

(۱۳۹) ن وین رقم $\frac{1}{ن\sqrt[ن]{ن}}$ ہے اور $\sqrt[ن]{ن}$ چہوٹا ۲ سے ہے اسلئے کہ $(1+1)^ن = 1 + ن + \dots$ پس $2^ن$ بڑی ن سے ہے اور اسیواسطے ۲ بڑا $\sqrt[ن]{ن}$ سے ہے، پس سلسلہ کی ہر ایک رقم $\frac{1}{2}$ سے بڑی ہے اسلئے بموجب دفعہ ۵۵۷ کے سلسلہ انفراجی ہے

(۱۴۰) مساوات معلوم سے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ $ی = لوگ\,(1+لا)$ اسیواسطے $ئی^ی = 1 + لا$

اسیواسطے لا = یی − ۱ = ی + ی²/|۲ + ی³/|۳ + . . .

(۱۴۱) لا² − ۳لا + ۷ + ۴ √(لا² − ۳لا + ۷) + ۴/۱ = ۲۰ ۴/۱ اسیواسطے √(لا² − ۳لا + ۷) + ۲/۱ = ± ۲/۹ یہہ قیمت √(لا² − ۳لا + ۷) = −۴ ٹہیک مساوات مین نہین بیٹہتی اسلئے √(لا² − ۳لا + ۷) = ۵ کو اختیار کرو

(۱۴۲) فرض کرو کہ بہری ہوئی مربع کی صف مقابل مین سپاہیون کی تعداد لا ہے تو کل سپاہیون کی تعداد لا² ہوگی اور خالی مربع کی صف مقابل مین لا + ۲۴ آدمی کہڑے ہین اور اوسمین چار چار صفین ہین اسلئے اس مربع سپاہیون کی تعداد (۲۴ + لا)² − (۲۴ + لا − ۸)² ہے پس لا² = ۴ [(۲۴ + لا)² − (۱۶ + لا)²] = ۴ (۴۰ + ۲لا) ۸
اسیواسطے لا² − ۶۴لا = ۱۲۸۰ پس اس مساوات کی قیمت جو مساوات مین سما سکتی ہے ۸۰ ہے

(۱۴۳) ۶لا² − لای − ۱۲ی² = ۰ مین ی = ن لا رکہو تو (۶ − ن − ۱۲ن²) لا² = ۰
ایک حل لا = ۰ مساوات سے تعلق نہین رکہہ سکتا پس ۶ − ن − ۱۲ن² = ۰ اسسے ن = ۳/۲ یا − ۴/۳ کو حاصل ہوگا ان دونو قیمتون کو دوسری مساوات مین مندرج کرو تو
ی = ۲لا/۳ اور ی = − ۳لا/۴

(۱۴۴) فرض کرو کہ ۲۰ سے بڑا کوئی عدد و ہے تو جب گاڑیون کی رفتار ۲۰ میل کی جگہہ و میل ہے تو آمدنی کی افزایش ع (و − ۲۰) اور خرچ کی افزایش ق (و − ۲۰)² ہے اسمین ع اور ق خاص مقادیر معینہ ہین پس فائدہ ع (و − ۲۰) − ق (و − ۲۰)² ہے اور یہہ فائدہ اوس حالت مین کہ و = ۴۰ ہو معدوم ہوجاتا ہے تو

۲۰ ع − ۴۰۰ ق = ۰ اسیواسطے ع = ۲۰ ق پس فائدہ
ق [۲۰ (و − ۲۰) − (و − ۲۰)²] یعنی ق [۶۰و − و² − ۸۰۰]
یعنی ق [۱۰۰ − (و − ۳۰)²] ہے اسی معلوم ہو کہ نفع اعظم جب ہوگا کہ و = ۳۰ ہو

(۱۴۵) ۱۳ کے اضعاف کو صنف (۱۳) سے تعبیر کرو تو

۱۰ = ۱۳ − ۳ اور ۱۰۰ = صنف (۱۳) − ۴ اور ۱۰۰۱ = صنف (۱۳) − ۱

۱۰^۲ = ۱۰ × ۱۰^۳ = صنف (۱۳) + ۳

۱۰^۵ = ۱۰^۲ × ۱۰^۳ = صنف (۱۳) + ۴

۱۰^۶ = ۱۰^۳ × ۱۰^۳ = صنف (۱۳) + ۱

۱۰^۷ = ۱۰ × ۱۰^۶ = صنف (۱۳) − ۳ .

اور علے ہذا القیاس

پس ع. + ۱۰ ع۱ + ۱۰^۲ ع۲ + ۱۰^۳ ع۳ + . . . = صنف (۱۳) + ع. − ع۳ + ع۶ − ع۹ . . .

۱۰ ع۱ + ۱۰^۴ ع۴ + ۱۰^۷ ع۷ + . . . = صنف (۱۳) − ۳ (ع۱ − ع۴ + ع۷ − . . .)

۱۰^۲ ع۲ + ۱۰^۵ ع۵ + ۱۰^۸ ع۸ + . . . = صنف (۱۳) − ۴ (ع۲ − ع۵ + ع۸ − . . .)

اس سے معلوم ہوا کہ عدد مفروض

= صنف (۱۳) + ع. − ع۳ + ع۶ − . . . − ۳ (ع۱ − ع۴ + ع۷ − . . .) − ۴ (ع۲ − ع۵ + ع۸ − . . .)

(۱۴۶) فرض کرو کہ ص = ا + ا ر + ا ر^۲ + . . . + ا ر^(ن−۱)

ص′ = ا − ا ر + ا ر^۲ + . . . + ا (−۱)^(ن−۱) ر^(ن−۱)

پس ص = ا (ر^ن − ۱)/(ر − ۱) اور ص′ = ا (۱ − (−ر)^ن)/(۱ + ر) = ا (۱ + ر^ن)/(۱ + ر) کیونکہ ن طاق ہے

اسی واسطے ص ص′ = ا^۲ (ر^۲ن − ۱)/(ر^۲ − ۱) اور یہ سلسلہ ا^۲ + ا^۲ ر^۲ + ا^۲ ر^۴ + . . .

کی ن رقموں کا مجموعہ ہے

(۱۴۷) خطوط مستقیم کو اعداد ۱ و ۲ و ۳ . . . ن سے تعبیر کرو اور ان نقاط تقاطع کا مجموعہ سطح بناؤ کہ ۱ و ۲ کا تقاطع اور ۲ و ۳ کا تقاطع . . . ن − ۱ اور ن کا تقاطع اور ن اور ۱ کا تقاطع پس ہر ایک خط پر صرف دو نقطے ہونگے اور ہمکو دو ہی نقطے ایک خط پر مقرر کرنی چاہئیں اسلئے کہ اور طرح سے ایک خط مستقیم پر یا خطوط مستقیم پر دو سے زیادہ نقطے مقرر ہو جائینگے پس ہمکو اس سے معلوم ہوا کہ اس مثال کا حال ایسا ہی ہے جیسا کہ باب ۳۴ کی ۱۲ مثال کا تنہا

(۱۴۸) ۴^{۱/۸} = ۲^{۲/۸} اور ۸^{۱/۱۶} = ۲^{۳/۱۶} اور ۱۶^{۱/۳۲} = ۲^{۴/۳۲} ... پس
جملہ مفروضہ برابر ۲ کے اوس قوت کے جو ۱/۴ + ۲/۸ + ۳/۱۶ + ۴/۳۲ + ... سے
تعبیر ہوتی ہے یعنی ۱/۴ (۱ − ۱/۲)^{-۲} سے یعنے ۱ سے

(۱۴۹) دفعہ ۵۲۹ کے موافق ہمکو یہہ حاصل ہے کہ
ق + ۲ر + ۳ص + ۴ط = ۴ اور ع + ق + ر + ص + ط = −۳

پس س ر

ع	ق	ر	ص	ط
−۴	۰	۰	۰	۱
−۵	۱	۰	۱	۰
−۵	۰	۲	۰	۰
−۶	۲	۱	۰	۰
−۷	۴	۰	۰	۰

(−۳)(−۴)(−۳) + (−۱)(−۳)
+ (−۴)(−۳)/|۲ (−۱)^۲
+ (−۵)(−۴)(−۳)/|۲ (−۱) +
+ (−۶)(−۵)(−۴)(−۳)/|۴

پس ۳ − ۳۶ + ۶ + ۳۰ + ۱۵ یعنے ۱۸

(۱۵۰) فرض کرو کہ اساس ا و ا ر و ا ر^۲ ... ا ر^{ن−۱} ہوا ور مقادیر
ط. و ط۱ و ط۲ ... ط ن−۱ ہوں اور لوکارثم مشترک لا ہو تو
ط. = ا^لا اور ط۱ = (ا ر)^لا اور ط۲ = (ا ر^۲)^لا اور ط۳ = (ا ر^۳)^لا ...
پس نسبت ط۲ کی ط۱ کے ساتھہ ر^لا ہے یعنی لا لوکارثم نسبت کی موافق اساس ر کی ہے

(۱۵۱) ۳ − ۱۱/(۱+۲لا) + ۳ − ۱۲/(۱+۳لا) = ۳ − ۱۳/(۳+۲لا) + ۳ − ۳/(۱−لا)
اسواسطے
۱۳/(۳+۲لا) − ۱۱/(۱+۲لا) = ۱۲/(۱+۳لا) − ۳/(۱−لا)
اسواسطے
(۲۰ − ۴لا)/((۱+۲لا)(۳+۲لا)) = (۱۵ − ۳لا)/((۱−لا)(۱+۳لا))
پس (۱+۲لا)(۳+۲لا)۳ = (۱−لا)(۱+۳لا) یا ۴ پس کیا لا = ۵

اب دوسری مساوات کا اختصار یہہ ہے کہ ۲لا^۲ + ۳لا + ۱۳ = ۰

(۱۵۲) دفعہ ۲۳۴ میں مثال کے پہلے حصہ کا ذکر ہو چکا ہے – اب یہہ ظاہر ہے کہ مساوات کے

بشرائط لا = ا اور لا = ب اور لا = ح سے پوری ہوتی ہین پس مساوات متطابقہ ہونی چاہئے اور یہہ بات اگر مساوات کے داہئین طرف کے ارقام کو مفرد اور مختصر بناؤ تو ظاہر ہوجائیگی

(۱۵۳) تقسیم کرنے سے $\frac{لا (لا^۲ + ی^۲)}{ی^۲ (لا^۲ - ی^۲)}$ = ۶ اسمین ی = ن لا رکہو تو ۱ + ن^۲ = ۶ (۱ - ن^۲) ن^۲

اسے معلوم ہوا کہ ن^۲ = $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ اور اول مساوات معلوم سے لا^۲ (۱ + ن^۲) = ۹ ن

(۱۵۴) فرض کرو کہ گہنٹہ مین لا فیصدی تانبا تہا تو ۱۰۰ - لا فی صدی قلعی ہوگی اور جو ڈہیر گلایا گیا اوسمین ی فیصدی برنج تہا اسیواسطی ۱۰۰ - ی فیصدی گہنٹہ کا مادہ ہوگا پس اب اس گلے ہوئے مادے مین تانبے اور برنج اور قلعی کی مقدار پر علیحدہ علیحدہ خیال کرین تو یہہ مساواتین حاصل ہونگی

$$\frac{لا}{۱۰۰} \cdot \frac{۱۰۰ - ی}{۱۰۰} + \frac{۹۱}{۱۰۰} \cdot \frac{ی}{۱۰۰} = \frac{۸۸}{۱۰۰}$$

$$\frac{ی}{۱۰۰} \cdot \frac{۶}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱۰۰ - لا}{۱۰۰} \cdot \frac{۱۰۰ - ی}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰} \cdot \frac{ی}{۱۰۰} = \frac{۸}{۱۰۰}$$

ان مساواتون مین سے دو سے تیسری مساوات پیدا ہوتی ہے اسواسطی کہ تینون مساواتون کے جمع کرنے سے ہم کو ایک مساوات متطابقہ حاصل ہوتی ہے دوسری مساوات سے ی = ۶۶ $\frac{۲}{۳}$ حاصل ہوتا ہے اول مساوات مین اوسکی مندرج کرنے سے لا = ۷۵ حاصل ہوتا ہے

(۱۵۵) فرض کرو کہ اول ن طبعی اعداد مین سے دو دو کے حاصل ضربون کا مجموعہ ع ہے تو بموجب دفعہ ۲۲۵ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ن)^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + ن^۲ + ۲ ع$$

یعنی

$$\left[\frac{ن (ن + ۱)}{۲}\right]^۲ = \frac{ن (ن + ۱) (۲ ن + ۱)}{۶} + ۲ ع$$

اسے معلوم ہوا کہ

$$ع = \frac{ن^۲ (ن + ۱)^۲}{۸} - \frac{ن (ن + ۱) (۲ ن + ۱)}{۱۲}$$

$$= \frac{ن (ن + ۱)}{۲۴} \left[۳ ن (ن + ۱) - ۲ (۲ ن + ۱) \right]$$

= (ن − ۱) ن (ن + ۱) (۳ن + ۲) / ۲۴

(۱۵۶) فرض کرو کہ اول اعداد جو مفروض کئی گئی ہیں ۱ اور ۱ ر اور ۱ ر۲ اور ۱۱ ہیں تو اس سبب سے کہ آخرین اعداد سلسلہ موسیقیہ میں ہیں ۱/۱ر − ۱/۱ = ۱/۱ر۲ − ۱/۱ر پس ۱۱ = ۱ ر۲ / (۲ − ر)
اب فرض کرو کہ دوبارہ ۵ اعداد مفروض کئے گئے ہیں ۱ اور ۱ ر اور ی اور ی ہیں تو موافق سابق کے ی = ۱ ر / (۲ − ر) اور ۱ ر ی = ی۲ پس ی = ۱ ر / ۲(۲ − ر) پس ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ۱ ر۲ / (۲ − ر) چھوٹا ۱ ر / ۲(۲ − ر) یعنے ر (۲ − ر) چھوٹا ۱ سے ہے یہہ ظاہر ہے اسواسطے کہ
۱ − ر (۲ − ر) = (۱ − ر)۲

(۱۵۷) اگر اس سوال میں یہہ قید نہ ہوتی کہ سبز و نیلی سلاخین پاس پاس نہ رہیں تو کل ترتیبین لۓ ہوتیں اب ہمکو وہ صورتیں اسمین سے نکال ڈالنی چاہئیں جنمیں سبز و نیلی سلاخین پاس پاس آئینگی اب لۓ ایسی صورتین ہیں جنمیں نیلی سلاخ پہلی سبز سلاخ سے آگے آئیگی اور لۓ ایسی صورتین ہیں کہ جنمیں سبز سلاخ پہلی نیلی سلاخ سے آئیگی پس تعداد مطلوب لۓ − ۲ لۓ ہے

(۱۵۸) فرض کرو کہ (۵ √۲ + ۷)م = ن + سہ اب (۵ √۲ + ۷) (۵ √۲ − ۷) = ۵۰ − ۴۹ = ۱
اسے معلوم ہوا کہ ۵ √۲ − ۷ ایک مثبت کسر واجب ہے اسیواسطے (۵ √۲ − ۷)م
ایک مثبت کسر ہے اور وہ برابر سہ کے ہونی چاہئے کیونکہ (۵ √۲ + ۷)م − (۵ √۲ − ۷)م
ظاہرا ایک صحیح ہے اسی معلوم ہوا کہ سہ (ن + سہ) = (۵ √۲ − ۷)م (۵ √۲ + ۷)م
= (۵۰ − ۴۹)م = ۱

(۱۵۹) دفعہ ۵۲۹ کی طرح سے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ
ق + ۲ ر + ۳ ص + ۴ ط = ۴ اور ع + ق + ر + ص + ط = − ۳/۲

ع	ق	ر	ص	ط
− ۵/۲	۰	۰	۰	۱
− ۷/۲	۱	۰	۱	۰
− ۷/۲	۰	۲	۰	۰
− ۹/۲	۲	۱	۰	۰
− ۱۱/۲	۴	۰	۰	۰

پس سہ = − ۳/۲ × ۵ + (− ۳/۲) (− ۵/۲) (− ۲) (− ۴)
+ ۳ (− ۳/۲)(− ۵/۲) / ۲! + (− ۳/۲)(− ۵/۲)(− ۷/۲) / ۳! (− ۲)۲ × ۳
+ (− ۳/۲)(− ۵/۲)(− ۷/۲)(− ۹/۲) / ۴! (− ۲)۴

یعنی $-\frac{15}{2}+30+\frac{135}{8}-\frac{315}{4}+\frac{315}{8}$ یعنے صفر

اب ہم اس نتیجہ کو آسانی سے ثابت بھی کر سکتے ہین کہ

$(1+\text{لا})^{-2} = 1-2\text{لا}+3\text{لا}^2-4\text{لا}^3+\dots$ پس ہم کو $\left[(1+\text{لا})^{-2}\right]^{-\frac{3}{2}}$ مین

لا⁴ کا سر دریافت کرنا ہے یعنی $(1+\text{لا})^3$ مین اور یہہ ظاہر ہے کہ اسمین لا⁴ کا سر صفر ہے

(۱۶۰) فرض کرو کہ آغاز ماہ مین آبادی ع ہے تو مہینے کے آخر مین آبادی $\text{ع}+\frac{\text{ع}}{480}-\frac{\text{ع}}{600}$

یعنی $\text{ع}+\frac{5\text{ع}}{2400}-\frac{4\text{ع}}{2400}$ یعنے $\frac{2401}{2400}$ ع ہوگی اور اسی طرح سے

دوسرے مہینے کے آخر مین آبادی $\frac{2401}{2400}\times\frac{2401}{2400}$ ع یعنے $\left(\frac{2401}{2400}\right)^2$ ع ہوگی

اور علے ہذا القیاس ن مہینے کے آخر مین آبادی $\left(\frac{2401}{2400}\right)^{\text{ن}}$ ع ہوگی اب

فرض کرو کہ ن مہینہ مین آبادی دوگنی ہوگی تو

$\left(\frac{2401}{2400}\right)^{\text{ن}}\text{ع} = 2\text{ع}$ اسیواسطی $\left(\frac{2401}{2400}\right)^{\text{ن}} = 2$ طرفین مساوات کی لوگارثم

لو تو ن لوگ $\frac{2401}{2400}$ = لوگ ۲ یعنی ن لوگ (۲۴۰۱ − لوگ ۲۴۰۰) = لوگ ۲

یعنی ن [لوگ ۷⁴ − لوگ (۳ × ۲³ × ۱۰۰)] = لوگ ۲

اسیواسطی $\text{ن} = \frac{\text{لوگ } 2}{4\,\text{لوگ } 7-\text{لوگ } 3-3\,\text{لوگ } 2-2} = \frac{.30103000}{.0001807} = 1666$ تقریباً

(۱۶۱) یہان $\text{لا}^4+1 = 2(\text{لا}^4+4\text{لا}^3+6\text{لا}^2+4\text{لا}+1)$ اسیواسطی انتقال ارقام سے

$\text{لا}^4+8\text{لا}^3+12\text{لا}^2+8\text{لا}+1=0$ تقسیم لا² پر کرو تو $\text{لا}^2+\frac{1}{\text{لا}^2}+8\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)+12=0$

یعنی $\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)^2+8\left(\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}}\right)+10=0$ پس اس مساوات درجہ دوم کو حل کرکے ہم

$\text{لا}+\frac{1}{\text{لا}} = -4\pm\sqrt{6}$ حاصل کرینگے اور اسسے لا دریافت کرینگے

(۱۶۲) فرض کرو کہ اول دوڑ مین زید لا میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اور بکر ی میل فی گھنٹہ

کی رفتار سے چلا تو $\frac{2}{\text{لا}}-\frac{2}{\text{ی}}=\frac{2}{60}$ اور $\frac{2}{\text{ی}-2}-\frac{2}{\text{لا}+2}=\frac{2}{60}$ اسیواسطی

$60(\text{لا}-\text{ی}) = \text{لا}\,\text{ی}$ اور $60(\text{لا}-\text{ی}+4) = (\text{ی}-2)(\text{لا}+2)$ تفریق کرو تو

$120(\text{لا}-\text{ی}+2) = -2(\text{لا}-\text{ی}+2)$ اسیواسطی $\text{لا}-\text{ی}+2=0$

(۱۶۳) دوسری مساوات کو سادہ بناؤ تو ۲ لا ی + ۴ ی = ۰ اسیواسطی کیا ی = ۰ یا لا = −۲
مساوات اول مین ی = ۰ کو مندرج کرو تو ی = ۱۹/۲ حاصل ہوگا

(۱۶۴) دفعہ ۳۸۴ کے موافق ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ
(لا + ی + ے) / (لا + ی + ۱ + ے + لا + لا + ی − ۱) = لا + ی + ے یعنی (لا + ی + ے) / ۲ (لا + ی + ے) = لا + ی + ے
پس کیا تو لا + ی + ے = ۰ یا لا + ی + ے = ۱/۲ اگر اول مساوات کو لین تو
لا = ۰ اور ی = ۰ اور ے = ۰ ۔ اگر دوسری مساوات کو لین تو ہمکو لا = ۱/۲ (ی + ے + ۱)
ی = ۱/۲ (ے + لا) اور ے = ۱/۲ (لا + ی − ۱) اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
لا = ۱/۲ اور ی = ۱/۴ اور ے = −۱/۴

(۱۶۵) ۱۰۱ کے اضعاف کو ضف (۱۰۱) سے تعبیر کرو تو
۱۰ = ۱۰۱ − ۱ اور ۱۰^۲ = ضف (۱۰۱) − ۱۰۰ اور ۱۰^۴ = ضف (۱۰۱) + ۱
اور ۱۰^۵ = ضف (۱۰۱) + ۱۰ اور علے ہذا القیاس پس
ع۰ + ۱۰ ع۱ + ۱۰^۲ ع۲ + ۱۰^۳ ع۳ + ...
= ضف (۱۰۱) + ع۰ + ۱۰ ع۱ − ع۲ − ۱۰ ع۳ + ع۴ + ۱۰ ع۵ − ...

(۱۶۶) ہمکو حاصل ہے کہ ا = (ب + ج)/۲ اور ج = ۲ ا ب/(ا + ب) اسیواسطی ج (ا + ب) = (ب + ج) ب
اسیواسطی ا ج = ب^۲ اور ۲ ا = ب + ج = ب + ۲ ا ب/(ا + ب) اسیواسطی
(۲ ا − ب)(ا + ب) = ۲ ا ب اسیواسطی ب^۲ + ب ا − ۲ ا^۲ = ۰ اسیواسطی
ب = ا یعنی −۲ ا اگر ب = ا تو ج = ا اگر ب = −۲ ا تو ج = ۴ ا

(۱۶۷) اول حلون کے مجموعہ مین سے دو خطوط مستقیم لو تو اور باقی دو مجموعون مین سے ایک خط مستقیم
تو کل مثلث ان خطوط سے م(م − ۱)/۲ (ن + ع) مثلث پیدا ہونگے اور اسیطرح اگر دوسرے
مجموعہ مین سے دو خط مستقیم لین اور باقی دو مجموعون مین سے ایک ایک اور ایسی ہی تیسرے
مجموعہ مین سے دو خط مستقیم اور باقی مجموعون مین سے ایک ایک خط مستقیم اور پہر آخر کو

ہر مجموعہ مین سے ایک خط مستقیم ہو تو م ن ع مثلث پیدا ہونگے

(۱۶۸) $(۱-لا)^{-۲}(۱-لا)^{ن} = (۱-لا)^{ن-۲}$ ہر طرف کو پھیلاؤ اور $لا^{ر-۱}$ کے سر کو منتخب کرو

اب دائین طرف ہم سر اس حاصل ضرب سے دریافت کرتے ہین کہ

$$\left[۱+۲لا+۳لا^۲+\cdots+(ر+۱)لا^ر+\cdots\right]\left[۱-ن لا+\frac{ن(ن-۱)}{۲}لا^۲+\cdots\right]$$

اب یہان یہہ امر آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ سر وہی ہے جو مقدار $ا_ر$ سے تعبیر کیا گیا ہے

پس $ا_ر$ برابر $لا^{ر-۱}$ کے سر کے صورت مفصلہ $(۱-لا)^{ن-۲}$ مین ہونا چاہیئے اسے ثابت

ہوا کہ $ا_ر = ۰$ اگر ر-۱ بڑا ن-۲ سے ہو اور $ا_ر=(-۱)^{ن-۲}=(-۱)^ن$ اگر ر-۱=ن-۲

اور اگر ر-۱ چھوٹا ن-۲ سے ہو تو موجب دفعہ ۵۰۸ کے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ا_ر = (-۱)^{ن-۲}\ ا_{ن-ر}$$

(۱۶۹) دفعہ ۵۲۹ کی طرح ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

$$ق+۲ر+۴ط=۶ \quad \text{اور} \quad ع+ق+ر+ط=\frac{۷}{۳}$$

$$\text{سر} \ \frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}(-۱)(-۳)+\frac{\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۱}{۳}}{۲}(-۱)^۲+\frac{\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۱}{۳}}{۲}(-۳)^۲$$

$$+\frac{\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۱}{۳}(-\frac{۲}{۳})}{۲\ \ ۲}\ ۴\ (-۳)^۲$$

$$+\frac{\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۱}{۳}(-\frac{۲}{۳})(-\frac{۵}{۳})}{۲۴}\ ۴\ (-۳)$$

$$+\frac{\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۱}{۳}(-\frac{۲}{۳})(-\frac{۵}{۳})(-\frac{۸}{۳})}{۶}\ ۲$$

ع	ق	ر	ط
$\frac{۱}{۳}$	۰	۱	۱
$-\frac{۲}{۳}$	۲	۰	۱
$-\frac{۲}{۳}$	۰	۳	۰
$-\frac{۵}{۳}$	۲	۲	۰
$-\frac{۸}{۳}$	۴	۱	۰
$-\frac{۱۱}{۳}$	۶	۰	۰

یعنی $\frac{۲۸}{۳}-\frac{۵۶}{۹}-\frac{۱۴}{۳}-\frac{۵۶}{۲۷}-\frac{۴\times۵\times۷}{۲}-\frac{۲\times۷}{۳}$ یعنی $-\frac{۲۶}{۳}$ ۴۰۶.

(۱۷۰) فرض کرو کہ لوگارثم مطلوب کو لا تعبیر کرتا ہے تو $(۲۵)^{لا}=۵۰$ یعنے $۵^{۲لا}=۵۰$

یعنی $(\frac{۱۰}{۲})^{۲لا}=\frac{۱۰۰}{۲}$ اب لوگارثم موافق اساس ۱۰ کے لو تو ۲لا(لوگ ۱۰ - لوگ ۲)

= لوگ ۱۰۰ - لوگ ۲ پس $لا=\frac{۲-لوگ ۲}{۲(۱-لوگ ۲)}=\frac{۱٫۶۹۸۹۷}{۲\times ۰٫۶۹۸۹۷}=۱٫۲۱۵۳۴$

(۱۷۱) $لا+لا^{-۱}=(لا^{\frac{۱}{۲}}-۱+لا^{-\frac{۱}{۲}})(لا^{\frac{۱}{۲}}+لا^{-\frac{۱}{۲}})$ پس اس سے معلوم ہوا کہ

کیاتو لا^{۱/۲} + لا^{-۱/۲} = ۰ یا = ۵/۲ (لا^{۱/۲} − ۱ + لا^{-۱/۲}) اور اس سے لا^{۱/۲} + ۱ = ۰ ہوتا ہے پس لا = (−۱)^۲ = ۱ اور دوسری سے لا^{۱/۲} − ۱ + لا^{-۱/۲} = ۳/۲ پس لا^{۱/۲} − ۱۷/۴ لا^{۱/۴} + ۱ = ۰ اسی سے یہہ حاصل ہوتا ہے

لا^{۱/۴} = ۴ یا ۱/۴ اسیواسطے لا = ۴^{۴/۳} یا (۱/۴)^{۴/۳} = ± ۸ یا ∓ ۱/۸

(۱۷۲) (سہ + صہ)^۲ = ب^۲/ا^۲ اور (سہ − صہ)^۲ = (سہ + صہ)^۲ − ۴ سہ صہ = ب^۲/ا^۲ − ۴ج/ا

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہے کہ

لا^۲ − (۲ب^۲/ا^۲ − ۴ج/ا) لا + ب^۲/ا^۲ (ب^۲/ا^۲ − ۴ج/ا) = ۰

(۱۷۳) ۶۴ (لا^۲ − ء^۲) = (لا + ۹ء)^۲ اسیواسطے ۱۴۵ ء^۲ + ۱۸ لا ء − ۶۳ لا^۲ = ۰

اب ء = ن لا رکہو تو ۱۴۵ ن^۲ + ۱۸ ن − ۶۳ = ۰ اسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ن = ۳/۵ یا − ۲۱/۲۹ دوسری مساوات معلوم کو اس طرح لکہہ سکتے ہین کہ

(لا^۲ − لا + ء)^۲ − (لا^۲ − لا + ء) = ۵۰۶ اس مساوات درجہ دوم سے ہم کو یہہ حاصل

ہوتا ہے کہ لا^۲ − لا + ء = ۲۳ یا − ۲۲ ان مساواتون مین متواتر ء = ۳لا/۵ اور ء = − ۲۱/۲۹ لا رکہو

(۱۷۴) فرض کرو کہ کہیت کی گہاس کو موہن لا دنون مین اور سوہن ء دنون مین اور رادہا ی دنون مین کاٹتا ہے اب چونکہ کل کہیت کی گہاس اسطرح کٹ چکی ہے کہ موہن نے بارہ دن اور سوہن نے بارہ دن اور رادہا نے ۶ دن کام کیا ہے تو

۱۲/لا + ۱۲/ء + ۶/ی = ۱ اور لا/ء = ۲/۳ اور چونکہ موہن اور رادہا ایک دن مین (۱/لا + ۱/ی) حصے کہیت کی کاٹتے ہین تو وہ کل کہیت کی گہاس کو لا ی/(لا + ی) دنونمین کاٹینگے اور علے ہذالقیاس سوہن اور رادہا ملکر کل کہیت کی گہاس کو

ء ی/(ء + ی) دنون مین کاٹین گے اسیواسطے لا ی/(لا + ی) : ء ی/(ء + ی) :: ۷ : ۸

پس ۸ لا ی/(لا + ی) = ۷ ء ی/(ء + ی) اسمین ء کی جگہہ ۳لا/۲ مندرج کرو اور مساوات کو مختصر کرو تو

۳ لا = ۵ ی حاصل ہوگا اب ء اور ی کی قیمتین مساوات اول مین مندرج کرو تو

یہہ حاصل ہوگا کہ لا = ۳۰ اور ء = ۴۵ اور ی = ۱۸ اسیواسطے ۱/لا + ۱/ء + ۱/ی = ۱/۹

پس اگر وہ سب ملکر کام کرتے تو ایک دن مین $\frac{۱}{۹}$ حصہ کہیت کا کاٹتے
اسواسطے کل کہیت کو ۹ دن مین کاٹینگے

(۱۷۵) دفعہ ۳۴۴ کی ترکیب سی ہم ثابت کر سکتے ہین کہ اگر ہمارے پاس ان اوزان مین سے ا چھٹانک ۵ چھٹانک $۵^{۲}$ چھٹانک $۵^{۳}$ چھٹانک $۵^{۴}$ چھٹانک . . . مین دو دو ہون تو ہم جتنی چھٹانک کی وزن کو چاہین تو تول سکتے ہین ـ پس اب اگر ہم یہہ چاہتے ہین کہ ۳۱۲ چھٹانک سے زیادہ وزن کو نہ تولین تو ہم کو کوئی وزن $۵^{۳}$ کے دو وزنون سے زیادہ نہین چاہئے اسواسطے جو کم سے کم وزن $۵^{۴}$ وزن تولنے کے لئے چاہیے وہ $۵^{۴}-۲\times۵^{۳}-۲\times۵^{۲}-۲\times۵-۲$ یعنے ۳۱۳ چھٹانک

(۱۷۶) فرض کرو کہ اعداد ا اور ار اور ا $ر^{۲}$ اور ا $ر^{۳}$ ہین تو ا $(۱+ر+ر^{۲}+ر^{۳})=۱۵$ اور $ا^{۲}(۱+ر^{۲}+ر^{۴}+ر^{۶})=۸۵$ یعنی ا $(۱+ر)(۱+ر^{۲})=۱۵$ اور $ا^{۲}(۱+ر^{۲})(۱+ر^{۴})=۸۵$ اول مساوات کو مجذور کرو اور دوسری مساوات پر تقسیم کرو تو $\frac{(۱+ر)^{۲}(۱+ر^{۲})}{۱+ر^{۴}}=\frac{۴۵}{۱۷}$ اسیواسطے

$۱۷(۱+۲ر+۲ر^{۲}+۲ر^{۳}+ر^{۴})=۴۵(۱+ر^{۴})$ اسیواسطی

$۲۸(۱+ر^{۴})-۳۴(ر+ر^{۳})-۳۴ر^{۲}=۰$

$ر^{۲}$ پر تقسیم کرو تو $۲۸(ر^{۲}+\frac{۱}{ر^{۲}})-۳۴(ر+\frac{۱}{ر})-۳۴=۰$

اسیواسطی $۲۸(ر+\frac{۱}{ر})^{۲}-۳۴(ر+\frac{۱}{ر})-۹۰=۰$

اسیواسطی $ر+\frac{۱}{ر}=\frac{۵}{۲}$ یعنے $-\frac{۹}{۷}$ دوسری مساوات سے ر کے ناممکن قیمتین حاصل ہوتی ہین اور پہلی مساوات سے ر = ۲ یا $\frac{۱}{۲}$ ان مین سے کوئی قیمت لین او سے معلوم ہوگا کہ اعداد مطلوب ا و ۲ و ۴ و ۸ ہین

(۱۷۷) فرض کرو کہ ع آدمی جسطرف بیٹھنا چاہتے تہے بیٹھ گئے تو اسطرف ن ـ ع نشستین بیٹھنے کے لئے خالی رہین تو وہ ۲ ان ـ ع ـ ق آدمیون سے بہری جا سکتی ہین جو سرا کے طرف

بیٹھہ سکتے ہین پس ن − ع آدمی $\frac{|\underline{2ن-ع-ق}}{|\underline{ن-ع}\ |\underline{ن-ق}}$ طورون سے بیٹھہ سکتے ہین اب باقی آدمی دوسری طرف بیٹھینگے اور $|\underline{ن}$ ترتیبین ہر ایک طرف آدمیون کے بیٹھنے کی ہوسکتی ہین

پس کل طور بیٹھنے کے $\frac{|\underline{ن}\ |\underline{ن}\ |\underline{2ن-ع-ق}}{|\underline{ن-ع}\ |\underline{ن-ق}}$ ہوسکتی ہین

(۱۷۸) $\frac{1}{9ی^2+16لای+3لا^2} = \frac{13ی-2لا}{27ی^3-8لا^3}$ پس ہم کو $لا^{ر}$ کا سر $\frac{13ی-2لا}{27ی^3}\left(1-\frac{8لا}{27ی}\right)^{-1}$ کی صورت مفصلہ مین دریافت کرنا ہے اور یہہ سر $\frac{13}{27ی}\left(\frac{8}{27ی}\right)^{ر}$ ہے

(۱۷۹) فرض کرو کہ (س ن) $\frac{1}{ن}$ چھوٹا ک سے ہے تو س چھوٹا ک ن سے ہوا اسی ثابت ہوا کہ ایک خاص رقم کے ماقبل اور مابعدی سلسلہ اوس سلسلہ ہندسیہ سے کم ہے جو اوس رقم سے شروع ہوتا ہے اور جسکی نسبت مشترک ک ہے اسیواسطے اگر ک چھوٹا واحد سے ہو تو سلسلہ انضمامی ہے

(۱۸۰) $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = \left(\frac{ن+1}{ن}\right)^{ن} = \left(1-\frac{1}{ن+1}\right)^{-ن}$

لوگ $\left(1-\frac{1}{ن+1}\right)^{-ن} = ن\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$

$= (ن+1)\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$

$-\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$

$= 1+\frac{1}{2(ن+1)}+\frac{1}{3(ن+1)^2}+\frac{1}{4(ن+1)^3}+\cdots$

$-\left[\frac{1}{ن+1}+\frac{1}{2(ن+1)^2}+\frac{1}{3(ن+1)^3}+\cdots\right]$

$= 1-\frac{1}{2(ن+1)}-\frac{1}{2\times3(ن+1)^2}-\frac{1}{3\times4(ن+1)^3}-\cdots$

اب ہم دیکھتے ہین کہ جیسا ن زیادہ ہوتا ہے ایسا ہی لوگارثم زیادہ ہوتا ہے اسیواسطے $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ زیادہ ن کے ساتھہ ہوتا ہے

(۱۸۱) یہہ ظاہر ہے کہ مساوات کے ایک قیمت لا = ۱ ہے اور مساوات کو ہم اس طرح

لکھہ سکتے ہین کہ ۹ لا۲ - ۱ = ۴ لا۲ (۳ لا - ۱) یعنی (۳ لا - ۱) (۳ لا + ۱) = ۴ لا۲ (۳ لا - ۱)
پس مساوات کی دوسری قیمت ۳ لا - ۱ = ۰ پس اگر مساوات کی سب رقمون کو ایک طرف
لے آئین تو تغیر باقی مساوات (لا - ۱) (۳ لا - ۱) پر تقسیم ہوگی دفعہ ۳۲۲ دیکہو اور
امتحان سے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مساوات اسطرح لکہی جاسکتی ہے کہ
(لا - ۱) (۳ لا - ۱) (۲ لا + ۱)۲ = ۰ پس مساوات کی قیمتین ۱ و $\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۲}$ ہین

(۱۸۲) فرض کرو کہ اول تقسیم کے وقت زید و بکر و عمر کی عمرین ا و ا ر اور ا ر۲
تہین اور لا روپیہ او نہین تقسیم ہوا تہا تو اول دفعہ مین زید کو $\frac{ا لا}{ا + ا ر + ا ر۲}$ ہاتہہ
آیا تہا اور دوسری دفعہ مین اوسکو $\frac{(ا + ۵) لا}{ا + ۵ + ا ر + ۵ + ا ر۲ + ۵}$ روپیہ ہاتہہ آیا
پس $\left[\frac{ا}{ا (۱ + ر + ر۲)} - \frac{ا + ۵}{ا (۱ + ر + ر۲) + ۱۵}\right]$ لا = ۱۷ $\frac{۱}{۲}$ اور علیٰ ہذا القیاس
اور ا ر۲ + ۵ = ۲ (ا + ۵) اسیواسطی ا (ر۲ - ۲) = ۵ اول مساوات
کو دوسری مساوات پر تقسیم کرو $\frac{۵ (۱ + ر + ر۲) - ۱۵}{۵ (۱ + ر + ر۲) - ۱۵}$ = ۷ پس $\frac{ر۲ + ر - ۲}{ر۲ - ۲ ر + ۱}$ = ۷
یعنی $\frac{(ر + ۲) (ر - ۱)}{(ر - ۱)^۲}$ = ۷ اسسے معلوم ہوا $\frac{ر + ۲}{ر - ۱}$ = ۷ اور اسیواسطے ر = $\frac{۳}{۲}$
اسیواسطی ا = ۲۰ اور اسسے لا = ۱۰۴۵ حاصل ہوتا ہے
اسیواسطے ا = ۲۰ اور اسسے ہم لا = ۱۰۴۵ حاصل ہوتا ہے

(۱۸۳) لا + ی - (لا ی)$^{\frac{۱}{۲}}$ = ۶۱ اور لا$^{\frac{۱}{۲}}$ ی$^{\frac{۱}{۲}}$ (لا$^{\frac{۱}{۲}}$ + ی$^{\frac{۱}{۲}}$) = ۷۸ اسیواسطے
(لا$^{\frac{۱}{۲}}$ + ی$^{\frac{۱}{۲}}$)۲ = $\frac{(۷۸)^۲}{لا ی}$ اس مساوات مین سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ
۳ (لا ی)$^{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{(۷۸)^۲}{(لا ی)}$ - ۶۱ اور اس مساوات درجہ دوم سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
(لا ی)$^{\frac{۱}{۲}}$ = ۳۶ یا - $\frac{۱۶۹}{۳}$ دوسری مساوات سے ناممکن قیمتین حاصل ہوتی ہین اسلئے
پہلی مساوات کو اول مساوات کے ساتہہ شامل کرکے یہہ حاصل کرو کہ
لا = ۸۱ و ۱۶ اور ی = ۱۶ و ۸۱

(۱۸۴) لا = ح ی + ب ی = ح ی + ب (ب لا + ا ی) اسیواسطی

لا(۱ - ب^۲) = ی(ح + اب) اور پھر ہ = ای + ح لا = ا(ب لا + ای) + ح لا

اسواسطے ی(۱ - ا^۲) = لا(ح + اب) ضرب چلیپا لگاؤ تو لا^۲(۱ - ب^۲) = ی^۲(۱ - ا^۲)

اسواسطے لا^۲/(۱ - ا^۲) = ی^۲/(۱ - ب^۲) اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ان کسور میں سے

ہر ایک = ی^۲/(۱ - ح^۲) اور پہلے دو نتیجوں کو آپس میں ضرب دینے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

لا ی(۱ - ا^۲)(۱ - ب^۲) = لا ی(ح + اب)^۲ اسواسطے (۱ - ا^۲)(۱ - ب^۲) = (ح + اب)^۲

اسواسطے ۱ = ا^۲ + ب^۲ + ح^۲ + ۲ اب ح

(۱۸۵) فرض کرو کہ کسی عدد کا اول مرتبہ ا ہے تو اس عدد کا مکعب برابر ا^۳ مع بعض اضعاف قسطاس کے ہوگا پس اس عدد کے مکعب کے اول وہی ہندسہ ہوگا جو ا^۳ کے اول ہندسہ ہوگا اب فرض کرو کہ قسطاس عددی ۹ ہے تو ۳^۳ و ۶^۳ و ۹^۳ کے اول ۰ ہے پس اول ہندسہ ۰ یا ۱ یا ۸ ہوگا

(۱۸۶) بموجب دفعہ ۲۷ کے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

(ب + ح + د + ش)^۳ = ۳(ب + ح + د + ش)(ب^۲ + ح^۲ + د^۲ + ش^۲)

- ۲(ب^۳ + ح^۳ + د^۳ + ش^۳) + ۶(ح د ش + ب د ش + ب ح ش + ب ح د)

اور یہی قاعدہ ہر جملہ کثیر الارقام کے واسطے ہو سکتا ہے — اسی ہمکو یہہ حاصل ہو سکتا ہے

کہ ا^۳(۱ + ر + ر^۲ + ر^۳ + ...)^۳ = ۳ا^۳(۱ + ر + ر^۲ + ر^۳ + ...) ا^۲(۱ + ر^۲ + ر^۴ + ر^۶ + ...)

- ۲ا^۳(۱ + ر^۳ + ر^۶ + ر^۹ + ...) + ۶ع

اسمیں بجائے حاصل ضرب مطلوب ع ہے پس

ا^۳(۱/(۱ - ر))^۳ = ۳ا^۳ · ۱/(۱ - ر) · ۱/(۱ - ر^۲) - ۲/(۱ - ر^۳) + ۶ع

اسواسطے ع = ا^۳/۶ [۱/(۱ - ر)^۳ + ۲/(۱ - ر^۳) - ۳/((۱ - ر^۲)(۱ - ر))]

اگر ۳ع = ا^۳/(۱ - ر^۳) تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ ۱/(۱ - ر)^۳ = ۳/((۱ - ر)(۱ - ر^۲)) اسواسطے

۱ + ر = ۳(۱ - ر) اس سے معلوم ہوا کہ ر = ۱/۲

سلسلہ تنہامی ہے اگر لا چھوٹا ی سے ہو اور بموجب مثال ۱۸۰ کے $(۱ + \frac{۱}{ن})^{ن}$ زیادہ
ن کے ساتھ ہوتا ہے پس $\frac{ی}{(۱+\frac{۱}{ن})^{ن}}$ ہمیشہ زیادہ واحد سے ہوگا خواہ ن کی کیسی ہی
بڑی قیمت فرض کرو پس اس سے ثابت ہوا کہ لا = ی تو بموجب دفعہ ۵۶۰ کے
سلسلہ انفراجی ہے اور جب لا بڑا ی سے ہے تو بدرجہ اولی سلسلہ انفراجی ہوگا

(۱۹۰) $\frac{۱}{۱ - لا - لا^{۲} + لا^{۳}} = \frac{۱}{(۱+لا)(۱-لا)^{۲}}$ پس اس لئے جملہ کی لوکارثم

$= -۲ لوک (۱ - لا) - لوک (۱ + لا) = ۲ (لا + \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} + \cdots) - (لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \cdots)$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ن جفت ہو تو $لا^{ن}$ کا سر ن ہے اور اگر ن طاق ہو
تو $لا^{ن}$ کا سر $\frac{۳}{ن}$ ہے

(۱۹۱) $۱ + ۲ لا^{۲} + لا^{۴} = ۲ ا لا (۱ - لا^{۲})$ اسکو $لا^{۲}$ پر تقسیم کرو تو $\frac{۱}{لا^{۲}} + ۲ + لا^{۲} = ۲ ا (\frac{۱}{لا} - لا)$
یعنے $(لا - \frac{۱}{لا})^{۲} + ۲ ا (لا - \frac{۱}{لا}) + ۴ = ۰$ اس دوم درجہ کی مساوات حل کرنے سے
$لا - \frac{۱}{لا} = - ا \pm \sqrt{ا^{۲} - ۴}$ اس سے لا دریافت ہوسکتا ہے

(۱۹۲) اگر لا = ء = ی تو جملہ فنا ہو جاتا ہے اگر لا = ء تو جملہ $ی^{۲}(ی - لا)^{۲}$ ہو جاتا ہے
اور علے ہذا القیاس اگر ء = ی یا ی = لا ہو تو یہ جملہ ضرور مثبت ہوگا۔ اگر لا اور ء
اور ی مختلف ہوں اور اونکی مقدار کے اعتبار سے ترتیب تنازلی جبریہ ہو یعنی لا − ء
اور ء − ی مثبت ہوں تو $لا^{۲}(لا - ء)(لا - ی)$ مثبت ہے اور $ی^{۲}(ی - لا)(ی - ء)$
مثبت ہے کیونکہ اجزاء ضربی ی − ء اور ی − لا دونوں منفی ہیں لیکن
$ء^{۲}(ء - ی)(ء - لا)$ منفی ہے اب کیا تو $لا^{۲}$ یا $ی^{۲}$ بڑا $ء^{۲}$ سے ہے اور
لا − ی بڑا لا − ء سے ہے اور ء − ی سے زیادہ تر بڑا ہے پس کم از کم ایک دونوں
$لا^{۲}(لا - ی)(لا - ء)$ اور $ی^{۲}(ی - لا)(ی - ء)$ میں سے کمیت کی اعتبار سے
بڑا $ء^{۲}(ء - ی)(ء - لا)$ سے ہوگا پس کل جملہ مثبت ہے

(۱۹۳) مساواتوں کو اس طرح لکھو کہ

(لا۲+۱)(ی۲+۱) = ۴ لا ی اور ن۲ (لا۲+۱) ی = لا (ی۲+۱) پس ضرب سے
ن۲ (لا۲+۱)۲ (ی۲+۱) ی = ۴ لا۲ ی (ی۲+۱) پس یہہ حل کہ ی = ۰ مساوات سے متعلق نہیں
ہو سکتا ی۲+۱ = ۰ سے ناممکن قیمتین حاصل ہوتی ہین اب ن۲ (لا۲+۱) = ۴ لا۲ مقرر کرو تو
لا۲+۱ = ± ۲لا/ن اسے ہم لا کو دریافت کرتے ہین اور چونکہ (لا۲+۱)(ی۲+۱) = ۴ لا ی
تو قیمت مندرج کرنے سے ± ۲/ن (ی۲+۱) = ۴ ی اسیواسطے ی۲+۱ = ± ۲ ن ی اسے
ہم ی کو دریافت کرتے ہین

(۱۹۴) فرض کرو لا = ک (ا - ب و) اور ی = ک (ا + ا و) اور ی = ک (ا + ا ب و۲)
اور انکو ہر ایک مساوات مین مندرج کرو تو اول مساوات ک (ا + ب + ح + ا ب ح و۲) = ۰
اور دوسرے کا (ا + ا ب و۲) (ا + ب + ح + ا ب ح و۲) = ۰ اسے معلوم ہوا کہ
دونو مساواتون کی شرائط پوری ہوجائنگی اگر ا + ب + ح + ا ب ح و۲ = ۰ ہو

(۱۹۵) م وان مجموع (م - ۱) ق + ۱ وین رقم سے اوس سلسلہ حسابیہ کے جو سلسلہ متوستقیہ
سے اخذ کیا جائے شروع ہوتا ہے یعنے وہ ا/ق - ب/۲ق + ب/۲ ق + (م - ۱) ق . ب/ق سے
سے شروع ہوتا ہے پس مجموعہ رقمون کا مجموعون مین یہہ ہے

ق/۲ [۲ا/ق - ب/ق + ب/ق + ۲ (م - ۱) ب/ق + ق - ۱ ب/ق] یعنے
ق/۲ [۲ا/ق + ۲ (م - ۱) ب/ق] یعنی ا + (م - ۱) ب ہے

(۱۹۶) فرض کرو کہ ن وین رقم کو سن تعبیر کرتا ہے تو سن = ۱/۲ (سن-۱ + سن-۲)
اسواسطے سن - سن-۱ = - ۱/۲ (سن-۱ - سن-۲) اسے ثابت ہوتا ہے کہ سلسلہ
س۲ - س۱ اور س۳ - س۲ اور س۴ - س۳ ... ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک - ۱/۲ ہے
اسیواسطے سن - سن-۱ = (س۲ - س۱) (- ۱/۲)^(ن-۲) = (ب - ا) (- ۱/۲)^(ن-۲) پس
س۲ - س۱ = ب - ا اور س۳ - س۲ = (ب - ا) (- ۱/۲) اور س۴ - س۳ = (ب - ا)(- ۱/۲)۲
... سن - سن-۱ = (ب - ا) (- ۱/۲)^(ن-۲) اسیواسطے جمع کرنے سے

$س_ن - س_{ر} = (ب - ا) \left[۱ + (-\frac{۱}{ر}) + (-\frac{۱}{ر})^۲ + \cdots + (-\frac{۱}{ر})^{ن-۲} \right]$

$= (ب - ا) \frac{(-\frac{۱}{ر})^{ن-۱} - ۱}{-\frac{۱}{ر} - ۱} = \frac{۲(ب - ا)}{۳} \left[۱ - (-\frac{۱}{ر})^{ن-۱} \right]$

(۱۹۷) اول دو چیزین ا اور ب فرض کرو نو انکی ترتیبین ا ب اور ب ا ہین اسے ہم $\frac{۱}{ا(ا+ب)}$ اور $\frac{۱}{ب(ا+ب)}$ کسرین بناتے ہین اونکا مجموعہ $= (\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب}) \frac{۱}{ا+ب} = \frac{۱}{اب}$

اب تین جزا اور ب اور ح فرض کرو تو وہ ترتیبین جمین ح آخر ہوتا ہے ا ب ح اور ب ا ح ہین اسے ہم $\frac{۱}{ا(ا+ب)(ا+ب+ح)}$ $\frac{۱}{ب(ب+ا)(ب+ا+ح)}$ بنائین تو انکا مجموعہ بموجب صورت اول $\frac{۱}{اب(ا+ب+ح)}$ ہے اور اسی طرح سے اون ترتیبون مین جنکے آخر اسے $\frac{۱}{بح(ا+ب+ح)}$ حاصل ہوگا اور جن ترتیبون کے آخر مین ب ہے اوسے $\frac{۱}{حا(ا+ب+ح)}$ حاصل ہو لیس کل مجموعہ

$= \frac{۱}{ا+ب+ح} \left(\frac{۱}{اب} + \frac{۱}{بح} + \frac{۱}{حا} \right) = \frac{۱}{اب ح}$ لیس جو امر تین جزون کے واسطے ثابت ہوا وہی چار جزون کے لئے ثابت ہو سکتا ہے اور علے ہذا القیاس

(۱۹۸) دائین طرف جو جملہ ہے وہ ظاہر ہے کہ $(۱ + ی)^ن (۱ + \frac{لا}{ی})^ن$ کی صورت مفصل مین وہ رقم ہے جسمین ی نہین ہے اور $(۱ + ی)^ن (۱ + \frac{لا}{ی})^ن =$

$(۱ + لا + ی + \frac{لا}{ی})^ن = (۱ + لا)^ن \left[۱ + \frac{ی + \frac{لا}{ی}}{۱ + لا} \right]^ن =$

$(۱ + لا)^ن \left[۱ + ن ی + \frac{ن(ن-۱)}{۲} ی^۲ + \cdots \right]$ اسمین ی بجای $\frac{ی + \frac{لا}{ی}}{۱ + لا}$ کے ہر اب ہمکو وہ رقم دریافت کرنی چاہیئے جو ی اور ی۲ اور ی۳ ... کی صورت مفصلہ مین و نہ رکھتی ہو اب یہان ہم دیکھتے ہین کہ ی اور ی۳ اور ی۵ ... مین تو کوئی ایسی رقم موجود نہین اور ی۲ مین $\frac{۲ لا}{(۱+لا)^۲}$ ہے اور ی۴ مین رقم $\frac{\underline{|۴}\, لا^۲}{\underline{|۲}\, \underline{|۲}\, (۱+لا)^۴}$ ہے اور علی ہذا القیاس

(۱۹۹) $س_ن = \frac{۱}{و_{ن+۱}}$ جسمین $و_ن = \left(\frac{ن + ۲}{ن + ۱}\right)^{ن+۱}$ $\cdot - \frac{ن + ۲}{ن + ۱} =$

$(۱ + \frac{۱}{ن + ۱})^{ن+۱} - \frac{ن + ۲}{ن + ۱}$ اسے معلوم ہوا کہ جب ن کو کما ینبغی بڑا فرض کرین تو

جہان تک ہم چاہین دن کو تقریبًا برابر ی - ۱ کے کر سکتے ہین اس سے معلوم ہوا کہ ہم سن کو برابر $\left(\frac{۱}{ی-۱}\right)^{ن+۱}$ کے کر سکتے ہین پس جب ن کماینبغی بڑا ہووے اور $\frac{۱}{ی-۱}$ چھوٹا واحد سے ہو تو سلسلہ سلسلہ ہندسیہ بنجایگا جسمین نسبت مشترک واحد سے کم ہوگی اور اسیواسطے وہ انضمامی ہوگا

(۲۰۰) دفعہ ۲۵۰ کی ترکیب کے موافق سلسلہ برابر ہے حاصلضرب $\lfloor ن+۳$ اور $لا^{ن+۳}$ کے سر کے جو صورت مفصلہ

$$\left(لا + \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} + \frac{لا^۴}{\lfloor ۴} + \cdot\cdot\right)^ن$$

مین واقع ہے اور یہہ سر وہی ہے جو $لا^۳$ کا سر صورت مفصلہ

$$\left(۱ + \frac{لا}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۲}{\lfloor ۳} + \frac{لا^۳}{\lfloor ۴} + \cdot\cdot\right)^ن$$ مین واقع ہے

اور بموجب دفعہ ۲۹۵ کے

ع	ق	ر	ص
ن-۱	۰	۰	۱
ن-۲	۱	۱	۰
ن-۳	۳	۰	۰

$ق + ۲ر + ۳ص = ۳$

اور $ع + ق + ر + ص = ن$ پس سر

$$ن\frac{۱}{\lfloor ۴} + ن(ن-۱)\frac{۱}{\lfloor ۲}\cdot\frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}\left(\frac{۱}{\lfloor ۲}\right)^۳$$

یعنی $\frac{ن}{۲۴} + \frac{ن(ن-۱)}{۱۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۴۸}$

اسیواسطے سلسلہ $= \lfloor ن+۳ \left[\frac{ن}{۲۴} + \frac{ن(ن-۱)}{۱۲} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۴۸}\right]$

(۲۰۱) اگر ضرب کا عمل اون اجزاء ضربی پر کرین جو اول مثال مین بیان ہوئی تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$۱ - لا - لا^۲ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} - لا^{۱۵}$ اب اگر ہم $(۱-لا^۶)(۱-لا^۷)(۱-لا^۸)\cdot\cdot$ کو آپسمین ضرب دین تو ظاہر ہے کہ حاصل ضرب $لا^{۱۲}$ تک یہہ ہوگا کہ $۱ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} - لا^{۱۲}$ اب اس کو پہلے حاصل ضرب مین ضرب دین اور $لا^{۱۲}$ تک حاصل ضرب لکھین تو یہہ ہوگا کہ

۱ - لا - $لا^{۲}$ + $لا^{۵}$ + $لا^{۷}$ - $لا^{۱۲}$

(۲۰۲) ضرب دینے یا دفعہ ۸۰۸ کی ترتیب سے بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$(ا - ب)^{۳} + (ب - ح)^{۳} + (ح - ا)^{۳} = - ۳ (ب - ا)(ح - ب)(ا - ح)$

اسے معلوم ہوا کہ

$(ا^{۲} - ب^{۲})^{۳} + (ب^{۲} - ح^{۲})^{۳} + (ح^{۲} - ا^{۲})^{۳} = - ۳ (ب^{۲} - ا^{۲})(ح^{۲} - ب^{۲})(ا^{۲} - ح^{۲})$

دوسرے کو اول پر تقسیم کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہو جائیگا

(۲۰۳) اب ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ $ر^{۱۰۰۰۰}$ چھوٹی بہ نسبت ۵۰ کے ہے اور ر = ۱ + $\frac{۱}{۱۰^{۴}}$

اب لوک $ر^{۱۰۰۰۰}$ = ۱۰۰۰۰ لوک ر = ۱۰۰۰۰ لوک $\frac{۱۰^{۴}+۱}{۱۰^{۴}}$ = ۱۰۰۰۰ (لوک ۱۰۰۰۱ - ۴)

= ۱۰۰۰۰ (لوک ۱۳ + لوک ۷۶۹ - ۴) = ۱۰۰۰۰ (لوک ۱۳ + ۳ لوک ۲ - ۲ - ۲) = ۴۳۴۲ء۰ ... ۱ء

اور نیز لوک ۵۰ = لوگ $\frac{۱۰۰}{۲}$ = ۲ - لوک ۲ = ۶۹۸۹۷ء۱ پس

لوگ $ر^{۱۰۰۰۰}$ بڑی بہ نسبت لوک ۵۰ کے ہے اسیواسطے $ر^{۱۰۰۰۰}$ بڑا ۵۰ سے ہے

(۲۰۴) فرض کرو کہ کسر متسلسل $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{ع+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{ع+}$ ... کو لا تعبیر کرتا ہے تو

$لا = \frac{۱}{\frac{۱}{ع + لا} + ۱} = \frac{ع + لا}{ع + ۱ + لا}$ اسیواسطے $لا^{۲}$ + ع لا - ع = ۰

اسیواسطے $لا = \frac{۱}{۲}(- ع + \sqrt{ع^{۲} + ۴ ع})$ اسیواسطے ۲ لا + ع = $\sqrt{ع^{۲} + ۴ ع}$

یہی نتیجہ مطلوب ہے

(۲۰۵) فرض کرو کہ ۹ پونڈ کے وزنوں کو لا تعبیر کرتا ہے اور ۱۴ پونڈ کے وزنوں کو ی تعبیر کرتا ہے تو ۹ لا + ۱۴ ی = ۲۲۴۰ ایک حل لا = ۰ اور ی = ۱۶۰

اور عام حل لا = ۱۴ ط اور ی = ۱۶۰ - ۹ ط اسمیں ط کی قیمت صفر سے لیکر ۱۷ تک ہو سکتی ہے ضمین صفر اور ۱۷ بھی داخل ہین پس ۱۸ حل ہوئی

(۲۰۶) فرض کرو کہ $\frac{۱}{(۱ - لا)(۱ - ۲ لا)} = \frac{ط}{۱ - ۲ لا} + \frac{ص لا + س}{(۱ - لا)^{۲}}$

اسیواسطے ۱ = ط $(۱ - لا)^{۲}$ + (ص لا + س) (۱ - ۲ لا) چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے

تو لا کی قیمت جو چاہیں فرض کر سکتے ہیں پس لا = ½ فرض کرو تو

۱ = ط/۴ پس ط = ۴ اسیواسطے ۱ - ۴ (۱ - لا)^۲ = (ص لا + س)(۱ - ۲ لا)

یعنے (۲ لا - ۳)(۱ - ۲ لا) = (ص لا + س)(۱ - ۲ لا) اسیواسطے

۲ لا - ۳ = ص لا + س اسیواسطے ص = ۲ اور س = - ۳ پس

۱ / ((۱ - ۲ لا)(۱ - لا)^۲) = ۴/(۱ - ۲ لا) + (۲ لا - ۳)/(۱ - لا)^۲ = ۴ (۱ - ۲ لا)^-۱ + (۲ لا - ۳)(۱ - لا)^-۲

پس لا^ن کا سر صورت منفصلہ میں ۴ × ۲^ن + ۲ ن - ۳ (ن + ۱) یعنی ۲^(ن+۲) - ن - ۳ ہے

(۲۰۷) دونو مفروضہ جملون کو ۱ - لا پر تقسیم کرو تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^ن)/(ن + ۱) چہوٹا (۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^(ن+۱))/ن سے ہے

یا ن لا^ن چہوٹی ۱ + لا + لا^۲ + ... + لا^(ن-۱) سے ہے اور یہہ ظاہر ہے کہ

ن رقمون میں سے ہر ایک قسم بائیں طرف بڑی لا^ن سے ہے

(۲۰۸) یہہ ظاہر ہے کہ جملہ ن^۴ - ۴ ن^۳ + ۵ ن^۲ - ۲ ن میں ن = ۱ ہو تو وہ

فنا ہو جاتا ہے اسلئے بموجب دفعہ ۳۲۴ کے ایک جز ضربی اوسکا ن - ۱ ہے اور

ن بہی ایک جز ضربی ہے پس جملہ کو ن (ن - ۱) پر تقسیم کرو تو ایک اور جز ضربی

دریافت ہوگا اور یہہ معلوم ہوگا کہ جملہ = (ن - ۲)(ن - ۱)^۲ ن اب ان میں

اجزاء ضربی ن - ۲ اور ن - ۱ اور ن میں سے ایک ۳ پر تقسیم ہوگا اور اگر ن جفت ہو

تو ن اور ن - ۲ لگا ۲ پر تقسیم ہوگا اور اگر ن طاق ہو تو (ن - ۱)^۲ چار پر

تقسیم ہوگا پس جملہ ۴ × ۳ یعنی ۱۲ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۰۹) جتنی طرح سے ۵ سکے نکالے جائینگے اونکی تعداد اون اجتماعون کی تعداد کے برابر ہے جو ۱۰ چیزونمیں سے پانچ پانچ کی لی جائیں یعنے ۱۰!/(۵! ۵!) اور جتنے طورون سے تین نشاندار سکے نکل سکتے ہیں وہ ... اونکی تعداد یعنی ۵!/(۲! ۳!) ہے پس تین نشاندار سکون کے نکلنے کا احتمال

(۵!/(۳! ۲!)) ÷ (۱۰!/(۵! ۵!)) یعنی (۵ × ۴ × ۳)/(۱۰ × ۹ × ۸) یعنی ۱/۱۲ ہے اسی معلوم ہوا کہ توقع کی قیمت ۱/۱۲ روپیہ ہے

(۲۱۰) ن وین رقم $\frac{(ن-۱)^{ن-۱}}{ن^ن} = \frac{۱}{ن-۱}\left(\frac{ن-۱}{ن}\right)^ن = \frac{۱}{ن-۱}\left(۱-\frac{۱}{ن}\right)^ن$ اب $\left(۱-\frac{۱}{ن}\right)^ن$ کو جسقدر چاہیں $ی^{-۱}$ کے قریب ن کو کمانبغی بڑا فرض کرکے لاسکتے ہیں دفعہ ۵۵۲ دیکھو پس سلسلہ ایک نسبت محدود سلسلہ متفرقہ جیسے $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots$ سے رکہتا ہے اسلئے وہ خود انفراجی ہے

(۲۱۱) فرض کرو کہ ن مقادیر کو $ا_۱$ و $ا_۲$ ... $ا_ن$ تعبیر کرتے ہیں تو

$$(ا_۱ + ا_۲ + \dots + ا_ن)^۲ = \frac{۲ن}{ن-۱}(ا_۱ ا_۲ + ا_۱ ا_۳ + \dots + ا_۲ ا_۳ + \dots)$$

اب دائیں طرف مجذور کی تشریح لکھو اور ن - ۱ میں ضرب دو اور ساری رقمیں دائیں طرف لے آؤ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$(ا_۱ - ا_۲)^۲ + (ا_۱ - ا_۳)^۲ + \dots + (ا_۲ - ا_۳)^۲ + \dots = ۰$$

اسیواسطے $ا_۱ - ا_۲ = ۰$ اور $ا_۱ - ا_۳ = \dots ا_۲ - ا_۳ = ۰$

(۲۱۲) ب - ج کی جگہہ لا اور ج - ا کی جگہہ ی رکھو تو لا - ی = -(ا - ب)

پس اول جملہ کی یہہ صورت ہوگی کہ ۲۵ $[(لا+ی)^۷ - لا^۷ - ی^۷][(لا+ی)^۳ - لا^۳ - ی^۳]$

یعنی ۲۵ $(لا^۲ + لا ی + ی^۲)^۲$ ۷ لا ی (لا + ی) × ۳ لا ی (لا + ی) مثال ۴ باب ۵ دیکھو

اور دوسرا جملہ یہہ ہوجاوے گا کہ ۲۱ $[(لا+ی)^۵ - لا^۵ - ی^۵]^۲$

یعنی ۲۱ $[۵ (لا+ی)(لا^۲ + لا ی + ی^۲) لا ی]^۲$

(۲۱۳) فرض کرو کہ اوسکی توقع زیست لا برس کی ہے تو بموجب دفعہ ۵۹۵ کے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے $۱۸۱۲\frac{۴}{۵} = ۱۵۰\frac{۱-ر^{-لا}}{ر-۱}$ جسمیں $ر = ۱ + \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۲۱}{۲۰}$ اسیواسطے

$$\frac{۱}{۲۰} \cdot \frac{۱۸۱۲\frac{۴}{۵}}{۱۵۰} = ۱ - ر^{-لا}$$ اسیواسطے $ر^{-لا} = ۱ - \frac{۹۰۶۴}{۱۵۰۰۰} = \frac{۵۹۳۶}{۱۵۰۰۰}$

اسیواسطے $ر^{لا} = \frac{۱۵۰۰۰}{۵۹۳۶} = \frac{۳۰۰۰۰۰}{۱۱۸۷۲۰}$ پس لا لوک $\frac{۲۱}{۲۰}$ = لوک $\frac{۳۰۰۰۰۰}{۱۱۸۷۲۰}$

اسیواسطے $لا = \frac{لوک ۳ - لوک ۱٫۱۸۷۲}{لوک ۳ + لوک ۷ - لوک ۲ - ۱} = \frac{۰٫۴۰۲۵۹۷۴}{۰٫۰۲۱۱۸۹۳}$ یعنے ٹھیک ۱۹ برس

(۲۱۴) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = ۱ + \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} = ۱ + \frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$ پس ہر ایک خارج قسمت واحد ہے

اسے معلوم ہوا کہ $ع_ر = ع_{ر-۱} + ع_{ر-۲}$ پس $ع_۴ = ع_۳ + ع_۲$ اور

$ع_{۴} = ع_{۵} + ع_{۴} \cdots ع_{۲} = ع_{۲ن-۱} + ع_{۲ن-۲}$ اسکے واسطے ۱ جمع کرنے سے

$ع_{۲ن} = ع_{۲} + ع_{۳} + ع_{۵} + ع_{۷} + \cdots + ع_{۲ن-۱}$

(۱۰) اسی طرح $ق_{ر} = ق_{ر-۱} + ق_{ر-۲}$ وغیرہ

(۲۱۵) فرض کرو کہ شمار کنندہ لا اور نسب نما ی ہے تو $لا + ۱۱ ی = ۱۰۳۱$ تقسیم پر کرو تو $لا + ۲ ی + \frac{ی-۱}{۵} = ۲۰۶$ اسکے واسطے $\frac{ی-۱}{۵}$ ایک صحیح ہونا چاہیئے فرض کرو کہ وہ = ط پس $ی = ۱ + ۵ط$ اور $لا = ۲۰۴ - ۱۱ط$ چونکہ کسر واجب ہے تو چاہیئے $۱ + ۵ط$ بڑا $۲۰۴ - ۱۱ط$ سے ہوا پہلے ط بڑا ۱۲ سے ہونا چاہیئے پس اس سے ثابت ہوا کہ ط کی قیمت ۱۳ اور ۱۸ کے درمیان ہونی چاہیئے اور اوسمین ۱۳ اور ۱۸ بھی داخل ہیں

(۲۱۶) بموجب دفعہ ۲۸۴ کے ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\lfloor ن}{(لا+۱)(لا+۲)\cdots(لا+ن+۱)} = \frac{ط_{۱}}{لا+۱} + \frac{ط_{۲}}{لا+۲} + \cdots \frac{ط_{ن+۱}}{لا+ن+۱}$ مساوات متطابقہ ہے اور $ط_{۱}$ و $ط_{۲}$ … $ط_{ن+۱}$ خاص مقادیر مستقلہ ہیں اب کسر دور کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\lfloor ن = ط_{۱}(لا+۲)(لا+۳)\cdots(لا+ن+۱) + ط_{۲}(لا+۱)(لا+۳)+\cdots(لا+ن+۱)$$

$$+ ط_{۳}(لا+۱)(لا+۲)(لا+۴)\cdots(لا+ن+۱) + \cdots$$

اب چونکہ یہہ متطابقہ ہے اسلئے وہ لا کی سب قیمتوں کے موافق درست ہے بجاے لا کی ۱- اگر رکھو تو بائیں طرف سب رقمیں فنا ہو جائینگی الا وہ جنمیں $ط_{۱}$ ہے پس یہہ حاصل ہوگا کہ $\lfloor ن = ط_{۱} \lfloor ن$ یعنی $ط_{۱} = ۱$ اور پھر متطابقہ میں ۲- بجاے لا رکھو تو بائیں طرف ساری رقمیں فنا ہو جائینگی الا وہ جنمیں $ط_{۲}$ ہے پس یہہ حاصل ہوگا کہ $\lfloor ن = ط_{۲} \lfloor ن-۱$ پس $ط_{۲} = -ن$ اور اسیطرح $ط_{۳} = \frac{ن(ن-۱)}{۲}$ اور علے ہذا القیاس یہہ مسئلہ مثال ۲۳۶ کی طرح بھی استقراء سے ثابت ہو سکتا ہے

(۲۱۷) بجاے ع کی ۲ رکھو اسمیں م اور ن مثبت صحاح ہیں اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $(ا+ب)^{\frac{م}{ن}}$ چھوٹا ہے بہ نسبت $\frac{ن ا + م ب}{ن + م}$ کے پھر فرض کرو کہ م مقادیر میں جنمیں

ہر ایک برابر ا+ب کی ہو اور ن−م مقادیر ہین جنین سے ہر ایک برابر ا کے ہو تو ان کا اوسط حسابیہ $\frac{م(ا+ب)+(ن-م)ا}{ن}$ یعنی $\frac{ن ا+م ب}{ن}$ ہے اور اوسط ہندسیہ ان کا $[(ا+ب)^{م}\, ا^{ن-م}]^{\frac{1}{ن}}$ یعنی $(ا+ب)^{\frac{م}{ن}}\, ا^{\frac{ن-م}{ن}}$ ہے بموجب فقرہ ۲۸۱ کے دوسرا پہلے سے کم ہے

(۲۱۸) ہم دیکھتے ہین کہ $۳^{۴}-۱ = ۸۱-۱ = ۸۰$ ہے اسواسطے $۳^{ن+۴} - ۳^{ن} = ۸۰ × ۳^{ن}$ پس اگر $۳^{ن}$ مین دہن کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی تو $۳^{ن+۴}$ مین دہن کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے لیکن اگر ن = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ کے تو $۳^{ن}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی اسواسطے ن کی ہر ایک قیمت کی موافق ہندسہ جفت ہی ہوگا - اور ۹ کی کوئی قوت ۳ کی ہی قوت ہے اسلیئے بیان مذکور ۹ کی قوتون پر بہی صادق آتا ہے - یہی بیان ۷ کی قواء پر بہی صادق آتا ہے اوسکا ثبوت اوسطرح ہوسکتا ہی جسطرح ۳ کی قواء کے لئی بیان ہوا یہان $۷^{۴}-۱ = ۲۴۰۰$ ہے خیال رکہو $۵^{ن+۱} - ۵^{ن} = ۵^{ن}(۵-۱) = ۲۰ × ۵^{ن-۱}$ پس اگر $۵^{ن}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہی تو $۵^{ن+۱}$ مین بہی دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوگا لیکن اگر ن = ۱ یا ۲ کے ہو تو $۵^{ن}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوتا ہے اسواسطے وہ ن کی ہر ایک قیمت کے موافق جفت ہوگا اور $۶^{ن+۱} - ۶^{ن} = ۶^{ن}(۶-۱) = ۳۰ × ۶^{ن-۱}$ اسلئے یہہ ثابت ہوتا ہے کہ $۶^{ن}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ طاق ہوگا خواہ ن کی کوئی قیمت فرض کرو

(۲۱۹) اب یہان تین فرض ممکن ہین اول یہہ کہ سب گولیان سیاہ ہون دوم گولیان سپید ہون سوم ایک گولی سیاہ ہو اب پہلی مشاہدہ کرلے سی فرض کرو کہ ان تینون فرضون کے احتمال برابر تہے تو بعد مشاہدہ کے اول فرض کا احتمال $۱ ÷ [۱ + \frac{۸}{۲۷} + \frac{۱}{۲۷}]$ یعنی $\frac{۲۷}{۳۶}$ ہے

(۲۲۰) بموجب فقرہ ۷۹۴ کے کسر مسلسل $ی + \frac{۱}{۲ی+} \frac{۱}{۲ی+} \cdots = \sqrt{ی^{۲}+۱}$ پس لا $= \sqrt{ی^{۲}+۱}$ اور بموجب فقرہ ۷۹۵ کے کسر مسلسل $لا - \frac{۱}{۲لا-} \frac{۱}{۲لا-} = \sqrt{لا^{۲}-۱}$

(۲۲۵) موافق دفعہ ۲۳۷ کے جملہ مفروضہ برابر ۲ (لا — سہ) (لا — صہ) جسمین سہ اور صہ

مساوات ۲ لا۲ — (۲ی + ۱) لا — ۱۱ ی۲ + ۴ ۲ ی — ۳ = ۰

کی قیمتین ہین اور یہہ قیمتین (۲ی + ۱ ± ۳ (۸ ی۲ — ۲ ی — ۵)) / ۴ یعنی ۱۱ ی — ۱ اور — ی/۲ + ۳/۴

ہین پس جملہ مفروضہ

۲ (لا — ۱۱ ی + ۱) (لا + ی/۲ — ۳/۴) = (لا — ۱۱ ی + ۱) (۲ لا + ی — ۳) = ۰

(۲۲۶) بموجب دفعہ ۴۵۸ کے سلسلہ دوری کی تحویل ایسے ہندسیہ سلسلون مین ہوسکتی ہے جنمین

ایک جملہ ط / (سہ — لا) سے اور دوسرا جملہ ص / (صہ — لا) سے پیدا ہو جسمین ط اور ص مقادیر مستقل ہین

اور سہ اور صہ مساوات ۱ — ع لا — ق لا۲ = ۰ کی قیمتین ہین اب ان دونون

سلسلون کے انضمامی ہونے کے لئے ضرور ہے کہ لا چھوٹا دونو سہ اور صہ سے ہون

(۲۲۷) (ع۱ ا۱ + ع۲ ا۲ + . . . + عن ان) / (ع۱ + ع۲ + . . . + عن) بڑا

(ع۱ ا۱۲ + ع۲ ا۲۲ + . . . + عن ان۲) / (ع۱ + ع۲ + . . . + عن) سے ہے اسواسطے اگر کسور کو دور کرین

اور تمام رقمون کو دائین طرف لے آئین تو ہمکو یہہ سلسلہ مثبت مقادیر کا حاصل ہوگا کہ

ع۱ ع۲ (ا۱ — ا۲)۲ + ع۱ ع۳ (ا۱ — ا۳)۲ + . . . اور (ع۱ ا۱ + ع۲ ا۲ + . . . + عن ان) / (ع۱ + ع۲ + . . . + عن)

بڑا (ا۱ + ا۲ + . . . + ان) / ن سے ہے اسواسطے کہ اگر ہم کسور کو دور کریں اور سب رقمون کو

دائین طرف لے آئین تو ہم کو یہہ سلسلہ مثبت مقادیر کا حاصل ہوگا کہ

(ع۱ — ع۲) (ا۱ — ا۲) + (ع۱ — ع۳) (ا۱ — ا۳) + . . . اسی نتیجہ مطلوب حاصل ہے

(۲۲۸) ہم فرض کرسکتے ہین کہ ا = ۵ ع + سہ اور ب = ۵ ق + صہ اور ج = ۵ ر + لر

جس مین ع اور ق اور ر صحاح ہین اور سہ اور صہ اور لر تغیر کرتے ہین

۰ یا ± ۱ یا ± ۲ کو پس

(۵ ع + سہ)۲ + (۵ ق + صہ)۲ = (۵ ر + لر)۲

اسیواسطے لا^{۲} + صہ^{۲} - سہ^{۲} کیا تو صفر ہے یا ۵ پر تقسیم ہوتا ہے اب سہ^{۲} و صہ^{۲} و لا^{۲}
چاہیئے کہ صفر ہو یا ا یا ۴ اور امتحان کرنے سے یہہ ناممکن معلوم ہوتا ہے کہ لا^{۲} - صہ^{۲} - سہ^{۲}
برابر صفر کے ہو یا ۵ پر پورا تقسیم ہوتا ہو اگر سہ و صہ و لر مین ایک صفر نہ ہو پس اسی ثابت ہوا
کہ ا اور ب اور ح مین ایک پورا ۵ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۲۹) تمثیلاً فرض کرو کہ ۴ ہندسون کا عدد لکھا تھا تو وہ عدد یقینی ۹۹۹۹ اور ۱۰۰۰۰ کے
درمیان واقع ہوگا اور اسمین یہہ دونو بھی شامل ہین اب ۹۹۹۹ سی شروع کرین اور
۱۰۰۰۰ پر ختم کرین تو ہم دیکھتے ہین کہ نو عدد دون مین سے ایک عدد ایسا اتا ہے کہ پورا ۹ پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۳۰) اون خاص صورتون مین کہ ن = ۱ اور ن = ۲ کا دعوی ثابت ہی اور استقراء
سے وہ علی العموم ثابت ہوگا اسواسطے

لا^{ن} + ی^{ن} = (لا + ی) (لا$^{ن-۱}$ + ی$^{ن-۱}$) - لا ی (لا$^{ن-۲}$ + ی$^{ن-۲}$)

فرض کرو کہ لا = ۳ + $\sqrt{۵}$ اور ی = ۳ - $\sqrt{۵}$ تو لا^{ن} + ی^{ن} ایک صحیح عدد ہوگا جو لا^{ن}
کے مابعد بڑا لگا (دفعہ ۵۲۶ دیکھو) اب لا + ی تقسیم ۲ پر ہوتا ہے
اور لا ی = ۴ پس اگر لا$^{ن-۱}$ + ی$^{ن-۱}$ تقسیم ۲$^{ن-۱}$ پر اور لا$^{ن-۲}$ + ی$^{ن-۲}$ تقسیم
۲$^{ن-۲}$ پر پورا ہوتا ہے تو لا^{ن} + ی^{ن} پورا ۲^{ن} پر تقسیم ہوتا ہے

(۲۳۱) فرض کرو کہ لا^{۲} + سہ لا + صہ مشترک جز ضربی درجہ دوم کو تعبیر کرتا ہے اور
لا^{۳} + ع لا^{۲} + ق لا + ر = (لا^{۲} + سہ لا + صہ) (لا + لر) اور
لا^{۳} + عَ لا^{۲} + قَ لا + رَ = (لا^{۲} + سہ لا + صہ) (لا + لرَ)
تو ان متطابقون مین سرون کے برابر لکھنے سی یہہ حاصل ہوگا کہ
ع = سہ + لر اور ق = سہ لر + صہ اور ر = صہ لر
عَ = سہ + لرَ اور قَ = سہ لرَ + صہ اور رَ = صہ لرَ
اس سے معلوم ہوا کہ ع - عَ = لر - لرَ اور ق - قَ = سہ (لر - لرَ) اور ر - رَ = صہ (لر - لرَ)

عَ ر - ع رَ = سہ صہ (لر - لَر) اور قَ ر - ق رَ = صہَ (لر - لَر)

اسواسطے جملہاء مفروضہ آپسمین برابر ہین اسلئے کہ ہر ایک اونین کا برابر صہ کے ہے

(۲۳۲) اوپر جو حل لکھا ہے اوس سے یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ

ع - عَ / ر - رَ = ۱/صہ صہ لر = لر اور عَ - ع / رَ - ر = ۱/صہ صہ لَر = لَر

ق - قَ / ع - عَ = سہ اور ر - رَ / ع - عَ = صہ

(۲۳۳) چونکہ ۲۱ برس کی عمر کے آدمی کی زر سالیانہ ۱۰۰ روپیہ کی قیمت حال ۲۱۵۰ روپیہ ہے تو بچے کے واسطے قیمت حال ۲۱۵۰/ر۲۱ ہوگی بشرطیکہ یہہ امر یقینی ہو کہ بچہ ۲۱ برس کی عمر تک زندہ رہے گا لیکن ۱۰ بچون مین سے صرف چہہ اکیس برس کی عمر تک پہونچتے ہین تو قیمت حال ۶/۱۰ × ۲۱۵۰/ر۲۱ روپیہ ہوگی اب ر = ۱ + ۳/۱۰۰ پس لوک ۲۱۵۰/ر۲۱

= لوک (۴۳ × ۵۰/۱) - ۲۱ لوک ۳ ,۱ = ۲ لوک ۴۳ - لوک ۲ - ۲۱ لوک ۳ ,۱

= ۶۲۸ ۰ ,۳ = لوک ۱۱۵۵ اسواسطے قیمت حال = ۶/۱۰ × ۱۱۱۵ روپیہ = ۶۹۳ روپیہ

(۲۳۴) م (اَ - دَ/نَ) = د - ۱ + م اَ - دَ/نَ - (د - ۱) .

= د - ۱ + (۲ن - ۱) د - ن / (ن اَ - ن د) + ن د - ن

= م (ن اَ - ن د) + ن د - ن / (۲ن - ۱) (د - ۱) + ۱ = م (ن اَ - ن د) / (۲ن - ۱) (د - ن) + ۱ + د / م (ن اَ - ن د) + د (ن - ۱)

= ۲ (ن - ۱) + م (ن اَ - ن د) + د (ن - ۱) / ۲ = ۲ (ن - ۱) + م (ن اَ - ن د) - د (ن - ۱) / د

= ۲ (ن - ۱) + (۲ن - ۱) د - ن / م (ن اَ - ن د) + ن د - د

اسی طرح عمل کرنے سے ہمکو یہہ معلوم ہوگا کہ پانچ اول خارج قسمت

د - ۱ اور ۲ (ن - ۱) اور ۱ اور ۲ (د - ۱) ہین اور انہین سے سواء اول کے باقی

سب مکرر واقع ہوتے ہین

(۲۳۵) فرض کرو کہ دہائی کے ہندسہ کو الا اور اکائی کے ہندسہ کو ء تعبیر کرتا ہے تو عدد

۱۰ لا + ی ہوگا اسلئے معلوم ہوا کہ ۱۰ ی + لا = $\frac{1}{2}$ (۱۰ لا + ی) − ۱ اسیواسطی

۱۹ ی − ۸ لا + ۲ = بتقسیم ۸ پر کرو تو ۲ ی − لا + $\frac{۳ ی + ۲}{۸}$ = ۰

اسیواسطی $\frac{۳ ی + ۲}{۸}$ ایک صحیح عدد ہونا چاہیئے اسکو = ص فرض کرو تو ۳ ی + ۲ = ۸ ص

سو پر تقسیم کرو تو ی = ۲ ص + $\frac{۲ (ص − ۱)}{۳}$ اسواسطی $\frac{ص − ۱}{۳}$ صحیح عدد ہونا چاہیئے

اسکو = ط فرض کرو تو ص = ۳ ط + ۱ اسیواسطی ی = ۸ ط + ۲ اور لا = ۱۹ ط + ۵

چونکہ لا اور ی دونوں ۰ سے کم ہونی چاہیئے اسلئے جو حل یہاں دخل رکھتا ہے فقط

لا = ۵ اور ی = ۲ ہے

(۲۳۶) یہہ استقراء سے ثابت ہوسکتا ہی جب ن = ا تو خواہ لا کی قیمت کچھہ ہی ہو مگر نہ لا + ۱ اور نہ لا + ۲ فنا ہوتا ہو تو ثبوت ظاہر ہے فرض کرلو کہ ن کی کسی قیمت کے موافق بشرطیکہ نسب نما فنا نہ ہوتا ہو دعوی ثابت ہے لا کو لا + ۱ سے تبدیل کرو اور فرض کرلو کہ لا + ن + ۲ فنا نہیں ہوتا تو

$$\frac{1}{\text{لا}+1} - \frac{\text{ن}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)(\text{لا}+3)} - \cdots = \frac{1}{\text{لا}+\text{ن}+1} \quad \text{اور}$$

$$\frac{1}{\text{لا}+2} - \frac{\text{ن}}{(\text{لا}+2)(\text{لا}+3)} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{(\text{لا}+2)(\text{لا}+3)(\text{لا}+4)} - \cdots = \frac{1}{\text{لا}+\text{ن}+1}$$

دوسرے نتیجے کو اول نتیجے سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)} - \frac{2\,\text{ن}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)(\text{لا}+3)} + \frac{3\,\text{ن}(\text{ن}-1)}{(\text{لا}+1)\cdots(\text{لا}+4)} - \cdots = \frac{1}{\text{لا}+\text{ن}+1} - \frac{1}{\text{لا}+\text{ن}+2}$$

پھر اسکو اول نتیجے میں سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{\text{لا}+1} - \frac{\text{ن}+1}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)} + \frac{(\text{ن}+1)\,\text{ن}}{(\text{لا}+1)(\text{لا}+2)(\text{لا}+3)} - \cdots = \frac{1}{\text{لا}+\text{ن}+2}$$

یہہ وہی ہے جو ہم نے اول نتیجہ میں ن کو ن + ۱ سے بدلنے میں حاصل کرتے پس اگر مسئلہ ن کی کسی خاص قیمت کے موافق درست ہے تو وہ اوسکی قیمت مابعد کے موافق بھی درست ہے اور وہ ن = ۱ کی حالت میں درست ہی تو وہ علی العموم درست ہوا

یہہ مسئلہ ۲۱۶ مثال کی طرح بھی ثابت ہوسکتا ہی کیونکہ یہہ ہم فرض کرسکتے ہین کہ داہنی طرف جو جملہ ہے

۵۰ بطور مستطابقہ برابر

$\frac{ط_1}{لا+1} + \frac{ط_2}{لا+2} + \cdots + \frac{ط_{ن+1}}{لا+ن+1}$ جسمین ط۱ اور ط۲ اور ط۳ ... طن+۱

مستقل مقادیر ہین

(۲۳۷) ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ $لا^{ن} - 1$ بڑہی $ن (لا-1) لا^{\frac{ن-1}{2}}$ سے ہر لا−۱ پر تقسیم کرو تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ $\frac{لا^{ن-1} + لا^{ن-2} + \cdots + 1}{ن}$ بڑا $لا^{\frac{ن-1}{2}}$ سے ہے اب دائین طرف کا رکن ن مقادیر کا وسط حسابیہ ہے اور بائین طرف کا رکن انہین مقادیر کا وسط ہندسیہ ہے اور بموجب دفعہ ۱۸۱ کے اول بڑا ہے

(۲۳۸) چھوٹی قوتون مین تو مشاہدہ سے دعوی ثابت ہوتا ہے اور بڑی قوتون مین جیسے آٹھ اسی واسطے کہ $4^3 - 4 = 60$ اور $4^{ن+4} - 4^{ن} = 60 \times 4^{ن-1}$ پس $4^{ن+4}$ مین دہائی کے مرتبہ مین ہندسہ جفت ہوگا اگر $4^{ن}$ مین جفت ہے اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا اور $2^5 - 2 = 30$ پس $2^{ن+4} - 2^{ن} = 30 \times 2^{ن-1}$ پس $2^{ن+4}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوگا اگر $2^{ن}$ مین جفت ہوگا اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا اب ہم فرض کرتے ہین ن کم ۴ سے نہین ہے

اور $8^5 - 8 = 32760$ پس $8^{ن+4} - 8^{ن} = 32760 \times 8^{ن-1}$ اسی واسطے $8^{ن+4}$ مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے اگر $8^{ن}$ مین جفت ہے اور اگر طاق ہے تو طاق ہوگا

(۲۳۹) اب یہہ احتمال کہ ہندسہ ۲ ہے $\frac{1}{8}$ ہے اور اگر ہندسہ ۲ ہے تو یہہ احتمال کہ اوسکے قوا مین دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ طاق ہو $\frac{1}{2}$ ہے پس ۲ سے متعلق تو احتمال $\frac{1}{16}$ اور اسی طرح کا احتمال ۴ و ۸ سے متعلق $\frac{1}{16}$ ہے اور بموجب مثال ۲۱۸ کی ۶ سے متعلق احتمال $\frac{1}{8}$ ہے اور مثال ۲۱۸ کے موافق ۔ اور ۳ و ۵ و ۷ و ۹ مین سے ہر ایک سے متعلق احتمال صفر ہے پس کل احتمال $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$ یعنی $\frac{5}{16}$ ہے

(۲۴۰) یہان $س_{ن} = (ن+1)(ن+\ )(ن+3)\ ن^2 + 3ن + 2$ اور $\frac{س_{ن}}{س_{ن+1}} = \frac{(ن+4)(2)(ن^2 + 3ن + 2)}{(ن+1)\,2\,(ن+1)[(ن+1)^2 + 3(ن+1) + 2]}$ [illegible]

$$= \frac{(\text{ن}+4)(2\text{ن}^2+3\text{ن}+2)}{(\text{ن}+1)(2\text{ن}^2+7\text{ن}+7)} = \frac{2\text{ن}^3+11\text{ن}^2+14\text{ن}+8}{2\text{ن}^3+9\text{ن}^2+14\text{ن}+7}$$

$$= \frac{\text{ن}^3+\frac{11}{2}\text{ن}^2+7\text{ن}+4}{\text{ن}^3+\frac{9}{2}\text{ن}^2+7\text{ن}+\frac{7}{2}}$$

اب بموجب دفعہ ۶۷۷ کے طریقہ کتابت کر ا − ط − ا = ۱ بس سلسلہ انفراجی ہے

یا ہم اسطرح عمل کریں کہ دفعہ ۶۴۷ کی ترتیب کے موافق

$$\frac{2\text{ن}^2+3\text{ن}+2}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{ن}+1} - \frac{8}{\text{ن}+2} + \frac{11}{\text{ن}+3}\right)$$

اب اگر ہر ایک رقم کی صورت بدلیں تو یہہ معلوم ہوگا کہ سلسلہ مفروض

$$= \frac{11}{12} + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{\text{ن}} + \dots\right)$$

اسیواسطے بموجب دفعہ ۶۲۹ کے سلسلہ انفراجی ہوگا

(۶۴۱) یہاں $\text{ا}_2 = \frac{1}{2}(\text{ا}_1 + \text{ب}_1)$ اور $\text{ب}_2 = \frac{2\text{ا}_1\text{ب}_1}{\text{ا}_1+\text{ب}_1}$ اسیواسطے

$\text{ا}_2\text{ب}_2 = \text{ا}_1\text{ب}_1$ پس دعوی ثابت ہے جب ن = ۲ اب ہم اوسکو استقراء سے ثابت کرینگے کہ وہ علی العموم ثابت ہے فرض کرو کہ ن کی کسی قیمت کے موافق $\text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن} = \text{ا}_1\text{ب}_1$ اب

$\text{ا}_{\text{ن}+1} = \frac{1}{2}(\text{ا}_\text{ن} + \text{ب}_\text{ن})$ اور $\text{ب}_{\text{ن}+1} = \frac{2\text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن}}{\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن}}$ اسیواسطے

$$\text{ا}_{\text{ن}+1}\text{ب}_{\text{ن}+1} = \frac{(\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن})\,2\text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن}}{2(\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن})} = \text{ا}_\text{ن}\text{ب}_\text{ن} = \text{ا}_1\text{ب}_1$$

اس سے ثابت ہوا کہ اگر یہہ مسئلہ ن کی کسی خاص قیمت کے واسطے درست ہو تو وہ اوسکی صورت مابعد کی حالت میں درست ہے اور چونکہ مسئلہ ن = ۲ کی صورت میں درست ہے اسلئے وہ علی العموم درست ہے

(۶۴۲) اول اور دوم مساواتوں کو جمع کرو تو $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - \text{د}^2 - \text{ب}^2 = 2\text{لا}\,\text{د} - 2\text{ی}\,\text{لا}$ اسیواسطے

$\text{لا} - \text{د} = \pm\sqrt{\text{د}^2+\text{ب}^2}$ اور اسیطرح $\text{د} - \text{ی} = \pm\sqrt{\text{ب}^2+\text{ح}^2}$ اور $\text{ی} - \text{لا} = \pm\sqrt{\text{د}^2+\text{ح}^2}$

اسیواسطے جمع کرنے سی ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ مساواتیں غیر مطابق ہیں

اگر $\pm\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2} \pm \sqrt{\text{ب}^2+\text{ح}^2} \pm \sqrt{\text{د}^2+\text{ح}^2} = 0$

نہوا اب اگر یہہ ارتباط ہو تو تینوں معلوم مساواتیں دو مساواتوں کے برابر ہوجاتی ہیں

(۲۴۶) اگر دائین طرف ہر رقم کی صورت مفصلہ لکھی جائے تو لا کا سر یہہ دریافت ہوگا کہ

$$(-1)^{\text{ر}} \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}} \left[\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ن}-\text{ر}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{(\text{ن}-\text{ر})(\text{ن}-\text{ر}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots \right]$$

اور دائین طرف لا کا سر $(-1)^{\text{ر}} \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ر} \lfloor \text{ن}-\text{ر}} \cdot \frac{1}{\text{م}-\text{ن}+\text{ر}}$ اب ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ یہہ دونو برابر ہین ن ـ ر کی جگہہ ص رکہو تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

اور یہہ استقراء سے ثابت ہوسکتا ہے جب ص = ۱ تو ثبوت ظاہر ہے خواہ م کی کچہہ قیمت ہو اور م ـ ۱ فنا نہ ہوتا ہو فرض کرو کہ ص کی کسی خاص قیمت کے موافق دعوی درست ہے بشرطیکہ لنسب نما فنا نہ ہوتا ہو م کو م ـ ۱ سے بدل دو اور فرض کرلو کہ م ـ ص ـ ۱ فنا نہین ہوتا پس

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

$$\frac{1}{\text{م}-1} + \frac{\text{ص}}{(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \frac{\text{ص}(\text{ص}-1)}{(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1}$$

اول نتیجہ کو دوسرے نتیجہ سے تفریق کرو تو

$$\frac{1}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{2\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \frac{3\text{ص}(\text{ص}-1)}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1} - \frac{1}{\text{م}-\text{ص}}$$

اول نتیجہ پر اس کو زیادہ کرو تو

$$\frac{1}{\text{م}} + \frac{\text{ص}+1}{\text{م}(\text{م}-1)} + \frac{(\text{ص}+1)\text{ص}}{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)} + \cdots = \frac{1}{\text{م}-\text{ص}-1}$$

اور یہہ وہی نتیجہ ہے کہ ہم ص کو ص + ۱ سے بدلنے مین حاصل کرتے پس اگر یہہ مسئلہ ص کی کسی خاص قیمت کے موافق درست ہے تو وہ اوسکی صورت مابعد کے لیے بہی صحیح ہے اور جب وہ ص = ۱ کی صورت مین صحیح ہے تو وہ علے العموم صحیح ہوگا

(۲۴۷) دائین طرف تمام ارقام کو منتقل کرو اور انکو دو دو گروہ جو ایک دوسرے کو فنا کرتی ہین تو ہم کو ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ اوسکی ہر ایک رقم $(\text{ا}' - \text{ب}')(\text{ا}'' - \text{ب}'')$ کی صورت کی ہوگی اور یہہ ارقام مثبت ہین کیونکہ دونو جزو ضربی کیا مثبت ہین یا منفی ہین وغیرہ

(۲۴۸) بموجب ضابطہ فرسیٹ ع^ن = ۱ + ک ن اسمین ک کوئی صحیح عدد ہے اب
ن^۱ قوت مین طرفین کو اٹھاؤ تو دائین طرف ع حاصل ہوگی اور بائین طرف صورت
مفصلہ لکھنے سے ۱ + ع ن اسمین ع کوئی صحیح ہے

(۲۴۹) واقعہ کے مشاہدہ سے پہلے چھ فرض نوٹون کی نسبت ہوسکتی ہین جنکا احتمال برابر ہے
(۱) تین نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے ہون (۲) دو نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے ایک بیس روپیہ کا (۳) دو نوٹ پانچ پانچ روپیہ کے اور ایک دس روپیہ کا
(۴) ایک پانچ روپیہ کا اور دو دس دس روپیہ کے (۵) ایک پانچ روپیہ کا دو بیس بیس روپیہ کے (۶) ایک پانچ روپیہ کا دوسرا دس روپیہ کا تیسرا بیس روپیہ کا
بموجب ان فرضون کے جو واقعہ پیش آیا ہے اوسکا احتمال ا و ۲/۳ و ۲/۳ و ۱/۳ و ۱/۳ و ۱/۳ اور
بعد مشاہدہ واقعہ کے یہہ احتمالات جداگانہ ہین ۳/۱۱ و ۲/۱۱ و ۲/۱۱ و ۱/۱۱ و ۱/۱۱ و ۱/۱۱
اسیواسطے دوبارہ نکالنے مین جو کچھ نکلے اوسکی قیمت روپیون مین

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{11}\left[15\times3+20\times2+30\times2+25+25+35\right]$$

یعنی ۲۷۵/۳۳ یعنی ۲۵/۳ یعنی ۸ ۱/۳ ہے

(۲۵۰)

	۱ +	۰ +	۳ −	۱۲ −	۴ +	
۴		۴ +	۱۶ +	۲۸ −	۱۲۸ −	۸۳۲ −
۱۲ −			۱۲ −	۴۸ −	۸۴ +	۳۸۴ + ۲۴۹۶ +
	۱ +	۴ +	۷ −	۳۲ −	۲۰۸ −	۴۴۸ −

پس $\dfrac{x^4+3x^3-12x+4}{x^2-4x+12} = x^2+4x-7-32x^{-1}-208x^{-2}-\dfrac{448x^{-3}-2496x^{-4}}{x^2-4x+12}$

(۲۵۱) اول مساوات کو اسطرح لکھہ سکتے ہین $x^2y(y-1)+x(y-1)-4(y-1)=0$
پس کیا تو $y-1=0$ یا $x^2y+x-4=0$ اب $y=1$ اور اس کو دوسری
مساوات مین مندرج کرو تو ہم کو یہہ دریافت ہوگا کہ $x=1$ اگر $x^2y+x-4=0$
لیکن تو دوسری مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

$ط = ۱۲ \times \frac{۳}{۸۸} \times \frac{۱}{۱ - ۳۶۵۸ء} = ۴۵ء$ تقریباً

(۲۵۴) $\sqrt{۱ + د^۲}$ کی تحویل جب بر متسلسل کی طرف ہوگی تو ہر ایک خارج قسمت الجبر اول کے ۲ د ہوگا پس $ع_ن = ۲ د ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲}$ اور

$ق_ن = ۲ د ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}$ دفعہ ۴۱۴ کا اول سلسلہ

۰ و ۱ و د ۰۰ اور (۲) سلسلہ ۱ و د و ۱ ۰۰۰ ہوگا اسواسطے

بموجب ویں دفعہ کے $(د^۲ + ۱)$ $ق_ن = د ع_ن + ع_{ن-۱}$ اور $ع_ن = د ق_ن + ق_{ن-۱}$

ان چاروں مساواتوں میں سے اول ساوات سے $ع_{ن-۱} = \frac{ع_ن - ع_{ن-۲}}{۲ د}$ اب ن کو ن+۱ سے تبدیل کرو اور اسکو تیسری مساوات میں

اسیواسطے $۲(د^۲ + ۱) ق_ن = ع_{ن+۱} + ع_{ن-۱}$ اور پھر دوسری مساوات سے

$ق_{ن-۱} = \frac{ق_ن - ق_{ن-۲}}{۲ د}$ اسمیں ن کو ن+۱ سے تبدیل کرو اور مساوات چہارم میں مندرج کرو تو

$ع_ن = \frac{ق_{ن+۱} - ق_{ن-۱}}{۲} + ق_{ن-۱}$ اسیواسطے $۲ ع_ن = ق_{ن+۱} + ق_{ن-۱}$

(۲۵۵) فرض کرو کہ د کو لا سیب اور ی ناشپاتیاں اور ی آڑو خریدی تو $لا + د + ی = ۱۲$

اور $\frac{لا}{ن} + د + ۲ ی = ۱۲$ تفریق کرنے سے $\frac{۴}{۵} لا - ی = ۱۰$ اب ی کی قیمت دونوں مساواتوں

میں مندرج کرو تو $\frac{۹}{۵} لا + د = ۱۲$ اس سے معلوم ہوا کہ $\frac{لا}{۵}$ ایک صحیح ہو اسکو = ط کے فرض کرو تو

لا = ۵ ط اور د = ۱۲ − ۹ ط اور ی = ۴ ط اگر ط = ۰ تو لا = ۰ اور

د = ۱۲ اور ی = ۰ اور اگر ط = ۱ تو لا = ۵ اور د = ۳ اور ی = ۴

(۲۵۶) فرض کرو کہ $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - ح لا)(۱ - \frac{لا}{ح})} = \frac{ط}{۱ - ح لا} + \frac{ص}{۱ - \frac{لا}{ح}}$ اسیواسطے

$۱ + ب لا = ط(۱ - \frac{لا}{ح}) + ص(۱ - ح لا)$ چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے

اسلئے ہم لا کی جو قیمت چاہیں مقرر کرسکتے ہیں فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{ح}$ تو $۱ + \frac{ب}{ح} = ط(۱ - \frac{۱}{ح^۲})$

پس $ط = -\frac{ح(۱ ح + ب)}{۱ - ح^۲}$ فرض کرو کہ لا = ح تو $۱ + ب ح = ص(۱ - ح^۲)$

پس $ص = \frac{۱ + ب ح}{۱ - ح^۲}$ پس $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - ح لا)(۱ - \frac{لا}{ح})} = \frac{۱ + ب ح}{۱ - ح^۲} \cdot \frac{۱}{۱ - \frac{لا}{ح}} - \frac{ح(۱ ح + ب)}{۱ - ح^۲} \cdot \frac{۱}{۱ - ح لا}$

$ع_ن = ق_{ن} (۱ + د^۲) \ldots \frac{۱}{ع_{ن-۱}} + ع$ مساوات میں

۱۰۰ و ۱۰۱ و ۱۰۲ ... (۹۹) پر خیال کریں چونکہ (۱۰۵ + ۱)^{۳} ـ (۱۰۵ ـ ۱)^{۳} = ۱۲۰۰

تو اسسے معلوم ہوا کہ ۱۵ سے ۹۹ تک کے درمیان مین جو نتائج اعداد کے لیے حاصل ہوتے ہین
وہی ۹۳ سے آگے حاصل ہوتی ہین اب امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ ۹۵ صورتین ہین جنمین
سیکڑے کی مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے اور ۴۳ صورتین ایسی ہین کہ جنمین ہندسہ طاق ہے
اسسے ثابت ہوا کہ سیکڑہ کی مرتبہ پر مجذور کے اندر طاق ہندسے ہونیکا احتمال ۴۳/۱۰۰ ہے

(۲۶۰) فرض کرو کہ جملہ = ۱ + ط۱ لا + ط۲ لا^{۲} + ط۳ لا^{۳} + ... اسمین
ط۱ اور ط۲ اور ط۳ ... مین لا شامل نہین ہے اب لا کو ح لا سے بدلو تو یہہ نتیجہ نکلے گا کہ

(۱ + ح لا)/(۱ ـ ح لا) (۱ + ط۱ ح لا + ط۲ ح^{۲} لا^{۲} + ط۳ ح^{۳} لا^{۳} + ...) = ۱ + ط۱ لا + ط۲ لا^{۲} + ...

کسور کو دور کرو اور لا کے سرون کو برابر لکھو تو

ط ر ح^{ر} + ط ر ـ۱ ح^{ر} = ط ر ـ ط ر ـ۱ ح اسیواسطے

ط ر ـ۱ (ح + ح^{ر}) = ط ر (۱ ـ ح^{ر}) پس ط ر = ح (۱ + ح$^{ر ـ ۱}$)/(۱ ـ ح^{ر}) ط ر ـ۱ اسیطرح
متواتر ہر ایک کا سر دریافت ہوگا پس ط۱ تعبیر اکو کرتا ہے اسیواسطے

ط۱ = ح (۱ + ۱)/(۱ ـ ح) اور ط۲ = ح (۱ + ح)/(۱ ـ ح^{۲}) ط۱ = ح^{۲} (۱ + ۱) (۱ + ح)/((۱ ـ ح) (۱ ـ ح^{۲})) اور علیٰ ہذا القیاس

(۲۶۱) سہ^{۴} + سہ^{۲} صہ^{۲} + صہ^{۴} = (سہ^{۲} + صہ^{۲})^{۲} ـ ۲ سہ^{۲} صہ^{۲} = [(سہ + صہ)^{۲} ـ ۲ سہ صہ]^{۲} ـ سہ^{۲} صہ^{۲}

= (ب^{۲}/ا^{۲} ـ ۲ ح/ا)^{۲} ـ (ح/ا)^{۲} = ب^{۴}/ا^{۴} ـ ۴ ب^{۲} ح/ا^{۳} + ۳ ح^{۲}/ا^{۲}

(۲۶۲) سلسلہ موسیقیہ کے موافق جو سلسلہ حسابیہ ہو اوسکی اول رقم ا اور فرق عام ب مقرر کرو تو
۱/ن = ا + (م ـ ۱) ب اور ۱/م = ا + (ن ـ ۱) ب اسی سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ
ا = ب = ۱/م ن فرضکرو کہ سلسلہ موسیقیہ کی روین رقم لا ہے تو ۱/لا = ا + (ر ـ ۱) ب
= ر/م ن اسیواسطے لا = م ن/ر

(۲۶۳) فرض کرو کہ نوین رقم کو سن تعبیر کرتا ہے تو سن = $\sqrt{\text{سن ـ۱ سن ـ۲}}$ اسیواسطے
لوگ سن = ۱/۲ (لوگ سن ـ۱ + لوگ سن ـ۲) فرض کرو کہ لوگ سن = مر ن پس

مسن = ½ (مسن-۱ + مسن-۲) اسے موافق مثال ۱۹۶ کے نہیہ حاصل ہوگا کہ

مسن = مر۱ + ⅔ (مر۲ − مر۱) [۱ − (−½)^(ن−۱)] پس جب ن کا بہت بڑا ہو تو

زن − مسن کو جتنا چاہین قریب مر۱ + ⅔ (مر۲ − مر۱) کے یعنی (۲مر۲ + مر۱)/۳

کے لا سکتے ہین پس جب ن کا بہت بڑا ہو تو ہم یہہ رکھہ سکتے ہین کہ

لوگ سن = (۲لوگ ب + لوگ ا)/۳ = لوگ (ب² ا)^⅓ پس سن = (ب² ا)^⅓

(۲۶۴) فرض کرو کہ ب کو ا پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت ع نکلتا ہے اور ر باقی رہتی ہے تو

ب = ع ا + ر اسیواسطے ا/ب بڑا ہے 1/(ع+1) سے ہوا فرض کرو کہ

ا/ب = 1/(ع+1) + ا۱/ب۱ تو ا۱/ب۱ = (ا(ع+1) − ب)/(ب(ع+1)) = (ا − ر)/(ب(ع+1)) = (ا − ر)/(ب ق۱) جہین ق۱ بجاے

ع+1 کے ہے اور اسی طرح سے ہم ا۱/ب۱ کو 1/(ق۱ ق۲) + ا۲/ب۲ کی صورت مین رکھہ سکتے ہین

جسمین ب۲ = ب ق۱ ق۲ اور اگر چہوٹا ا۱ سے ہے اسی طرح عمل کرنے سے ہم صورت مطلوب

حاصل کر سکتے ہین ۔ اگر ب = ۷ اور ا = ۵ تو ق۱ = ۲ اور ق۲ = ۳ اور ق۳ = ۴ اور ق۴ = ۷

(۲۶۵) فرض کرو کہ اول قسم کے سکے لا اور دوسری قسم کے سکے ی ہین تو

(۸۱۱/۱۰۰) لا + (۷۶۶/۱۰۰۰) ی = ۱۰۸ اسیواسطے ۹۰ لا + ۷۴ ی = ۱۲۰۰۰ اسیواسطے

۴۵ لا + ۳۷ ی = ۶۰۰۰ اسکو ۳۷ پر تقسیم کرو تو لا + ی + ۲(۴ لا − ۳)/۳۷ = ۱۶۲

اسیواسطے (۴ لا − ۳)/۳۷ ایک صحیح ہونا چاہئے اسکو = ص کے فرض کرو تو ۴ لا = ۳ + ۳۷ ص

۴ پر تقسیم کرو تو لا = ۹ ص + (ص + ۳)/۴ اسیواسطے (ص + ۳)/۴ ایک صحیح ہو تو اسکو برابر ط کی

رکھو تو ص = ۴ط − ۳ اسیواسطے لا = ۳۷ط − ۲۷ اور ی = ۱۹۵ − ۴۵ط پس

حل ط = ۱ و ۲ و ۳ و ۴ کے رکھنے سے حاصل ہونگے اور لا = ۱۰ اور ی = ۱۵۰ اور لا = ۴۷

اور ی = ۱۰۵ اور لا = ۸۴ اور ی = ۶۰ اور لا = ۱۲۱ اور ی = ۱۵ حاصل ہوگا اول

حل سے سکون کی تعداد سب سے بڑی معلوم ہوتی ہے اور قیمت کے اعتبار سے مقدار کم

اور آخر حل سے سکون کی تعداد سب سے کم اور قیمت کے اعتبار سے سب سے بڑی مقدار

(۲۶۶) ہم کو معلوم ہے کہ سن = ۲ اسن-۱ + سن-۲ اور قن = ۲ن قن-۱ + قن-۲ پس

سن/قن − سن-۲/قن-۲ = ۲ا (سن-۱ قن-۲ − سن-۲ قن-۱) / قن قن-۲

پس جزو ضربی ۲ا شمار کنندہ مین واقع ہوتا ہے۔ اور یہہ درست ہے خواہ ن طاق ہو خواہ جفت

لیکن ان دونو صورتون مین فرق ہے۔ ہم کو معلوم ہے کہ ق۱ = ۱ پس ارتباط

قن = ۲ا قن-۱ + قن-۲ سے متواتر ثابت ہوتا ہے کہ ق۳ و ق۵ و ق۷ ۔۔۔ نہ

پوری ۲ا پر تقسیم ہوتی ہین سوا اسکے سن-۱ قن-۲ − سن-۲ قن-۱ تعداداً برابر واحد کے

ہی پس کسر کی تحویل نہایت مختصر صورت مین کیجائے تو اوس صورت مین کہ ن جفت ہوگا

شمار کنندہ ا ہے اور اگر ق طاق ہے تو شمار کنندہ ۲ا ہے

(۲۶۷) فرض کرو کہ تعداد ارقام ن ہے تو ہم کو یہہ ثابت کرنا ہے کہ ا(۱ + رن-۱)/۲ بڑا ا(۱ + ر + ر۲ + ۔۔۔ + رن-۱)/ن

یعنی ن (۱ + رن-۱) بڑا ۲ (۱ + ر + ر۲ + ۔۔۔ رن-۱) سے ہے۔ اب ہم بائین طرف کے رکن کو ن

ازواج ایسے بنا سکتے ہین جیسے کہ رم-۱ + رن-م جسمین م کی متواتر قیمتین اسی ن تک لی گئی ہین

اور ۱ + رن-۱ بڑا رم-۱ + رن-م سے ہی اسلئے کہ ۱ + رن-۱ − (رم-۱ + رن-م) = (۱ − رم-۱) (۱ − رن-م)

یہہ دونو جزو ضربی کیا مثبت ہین یا منفی

(۲۶۸) مثال ۲۲۸ مین ثابت ہو چکا ہے کہ تین مقادیر ا اور ب اور ج مین سے ایک ۵ پر پوری تقسیم ہوتی ہے

اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ کیا ا یا ب پورا ۳ پر تقسیم ہو۔ اب یہہ ناممکن ہے کہ ا اور ب

دونو طاق ہون اسلئے کہ اس صورت ا۲ + ب۲ پورا ۲ پر تقسیم ہوگا اور ۴ پر نہین ہوگا

برخلاف اسکے ج۲ پورا ۴ پر تقسیم ہوتا ہے اگر ج جفت ہو اور نہین ۲ پر بھی نہین تقسیم ہوگا اگر

ج طاق ہو اسے معلوم ہوا کہ ا اور ب کیا دونو جفت ہین یا دونین سے ایک جفت اور دوسرا

طاق ہے۔ اگر ا اور ب جفت ہین تو ج طاق ہے فرض کرو کہ ا = ۲ع + ۱ اور ج = ۲ق + ۱

تو ب۲ = (۲ق + ۱)۲ − (۲ع + ۱)۲ = ۴ق (ق + ۱) − ۴ع (ع + ۱)

پس ب۲ پورا ۸ پر تقسیم ہوتا ہے علی ہذا دونون صورتون مین ا ب ج پورا ۵ × ۴ × ۳ پر تقسیم ہوتا ہے

اگر اعداد ولے ۳ سے بڑا ہو تو وہ نہ ۳ پر پورا لقسیم ہوگا نہ ۴ پر پس چاہیے کہ یہ پوری ۳ پر بہی اور ۴ پر بہی لقسیم ہو۔ اسیواسطی وہ ۳ × ۴ پوری لقسیم ہوتی ہے

(۲۶۹) دو خاص اعداد مقررہ نکالنے کا احتمال $\frac{۲}{ن(ن-۱)}$ ہے پس توقع روپیونکی $\frac{۲}{ن(ن-۱)} \times ص$ ہے اسمین ص اوس حاصلضرب کو تعبیر کرتا ہے کہ ن اعداد طبعی مین سے دو دو کا لین۔ تو بموجب مثال ۵۵ اکر روپیون مین اوسکی توقع کی قیمت $\frac{۲}{ن(ن-۱)} \times \frac{(ن-۱)\,ن\,(ن+۱)(۳ن+۲)}{۲۴}$ یعنی $\frac{(ن+۱)(۳ن+۲)}{۱۲}$ ہے

(۲۷۰) فرض کرو کہ عر احتمال اوس شخص کے جیتنے کا ر وین برس تک ہے اور فر احتمال اوسکے مرنے کا ر وین سال کے آخر مین ہے۔ اور وہ روپیہ جواب دیا جائے اور بار بار دیا جائے لا ہے تو قیمت حال ع روپیہ کی جو اوسکے مرنے پر ملے گا $ع\left(\frac{فر_۱}{ر} + \frac{فر_۲}{ر^۲} + \frac{فر_۳}{ر^۳} + \dots\right)$ ہے اور قیمت حال قسطون کی $لا\left(۱ + \frac{قر_۱}{ر} + \frac{قر_۲}{ر^۲} + \frac{قر_۳}{ر^۳} \dots\right)$ اب یہہ دونو قیمت حال برابر ہونی چاہیے اور سوا اسکے ہم یہہ بہی جانتے ہین کہ $عر_م = قر_{م-۱}$ قرار دیہہ خیال کرکے کہ قر برابر ۱ کے ہے اور $ط = \frac{قر_۱}{ر} + \frac{قر_۲}{ر^۲} + \frac{قر_۳}{ر^۳} + \dots$ پس $لا(۱+ط) = ع\left(\frac{۱}{ر} + \frac{ط}{ر} - ط\right)$

پس $لا = \frac{ع}{ر} - \frac{ع\,ط}{ط+۱}$

(۲۷۱) فرض کرو کہ ہر ایک کسر = ک تو ک لوگ لا = لا(ی + ہی + لا) اور ک لوگ ی = ی(ہی + لا − ی) اول مساوات کو ی مین اور دوسرے کو لا مین ضرب دو اور جمع کرو تو $ی\ لوگ\ لا + لا\ لوگ\ ی = \frac{۲\,لا\,ی\,ہی}{ک}$ اسیواسطی $ی^{لا}\ لا^{ی} = ہی^{\frac{۲لای}{ک}}$ اسی طرح سے $لا^{ہی}\ ہی^{لا}$ اور $ہی^{ی}\ ی^{ہی}$ اسی کے برابر ثابت ہو سکتی ہین

(۲۷۲) اول مساوات مین انتقال مقادیر کرکے مجذور کرو تو

$$(لا^۲+ا^۲)(ی^۲+ب^۲) = (لا^۲+ب^۲)(ی^۲+ا^۲) - ۲(ا+ب)^۲\sqrt{(لا^۲+ب^۲)(ی^۲+ا^۲)} + (ا+ب)^۴$$

اسیواسطی $(لا^۲-ی^۲)(ا^۲-ب^۲) - ۲(ا+ب)^۲\sqrt{(لا^۲+ب^۲)(ی^۲+ا^۲)} + (ا+ب)^۴ = ۰$

لیکن $لا^۲ - ی^۲ = (لا+ی)(لا-ی) = (ا+ب)(لا-ی)$ اسیواسطی $(ا+ب)^۲$ پر تقسیم کرنے سے

اور انتقال مقادیر سے ہم کو یہہ حاصل ہے کہ

(لا − ی) (ا − ب) + (ا + ب)^2 = ۲ √(لا^2 + ب^2) (ی^2 + ا^2) اب آخر مساوات کا

دائین طرف کا رکن = (لا − ی) (ا − ب) + (لا + ی) (ا + ب) = ۲ (لا ا + ب ی)

اسیواسطی لا ا + ی ب = √(لا^2 + ب^2) (ی^2 + ا^2) مجذور کرو تو

۲ لا ی ا ب = لا^2 ی^2 + ا^2 ب^2 اسیواسطی (لا ی − ا ب)^2 = ۰ اسیواسطی لا ی = ا ب

اب آگے لا + ی = ا + ب کے ساتھہ عمل کرو

(۲۷۳) فرض کرو کہ مجذور اعداد مین سے ایک کو لا^2 اور اسکے ما فوق خارج قسمت کو ی سے تعبیر کریا تو

لا^2 = ۷ ی + ۴ اسیواسطی ی = (لا^2 − ۴)/۷ = (لا + ۲) (لا − ۲)/۷ پس لا + ۲ یا لا − ۲

مین ایک ۷ پر پورا تقسیم ہونا چاہئے تو لا = ۷ ط ± ۲ جسمین ط ایک صحیح عدد ہے اور ی = ۷ ط^2 ± ۴ ط

(۲۷۴) ہم کو معلوم ہے کہ ع$_ن$ = ۲ ع$_{ن-۱}$ + ع$_{ن-۲}$ پس ع$_۱$ + ع$_۲$ لا + ع$_۳$ لا^2 + ۰۰۰

ایک سلسلہ متوالیہ ہے اور اوسکا مجموعہ بموجب دفعہ ۴۶۶ کے $\dfrac{ع_۱ + (ع_۲ - ۲ ع_۱) لا}{۱ - ۲ لا - لا^2}$ ہے یہی معلوم ہوا کہ

اس جملہ کی صورت مفصلہ مین لا$^{ن-۱}$ کا سر ع$_ن$ ہے سوا اسکے ع$_۱$ = ۱ اور ع$_۲$ = ۲ + ۱

اسی جملہ کی یہہ صورت ہوگی کہ $\dfrac{۱ + لا}{۱ - ۲ لا - لا^2}$ اب بموجب دفعہ ۷۳۳ کے

۱ − ۲ لا − لا^2 = − (لا − سہ) (لا − صہ) جسمین سہ اور صہ مساوات لا^2 + ۲ لا − ۱ = ۰ کی

قیمتین ہین پس سہ + صہ = − ۲ اس سے معلوم ہوا کہ جملہ کی یہہ صورت ہے $-\dfrac{لا - \frac{۱}{۲}(سہ + صہ)}{(لا - سہ)(لا - صہ)}$

یعنے ½ (۱/(سہ − لا) + ۱/(صہ − لا)) یعنے −½ (صہ/(۱ + صہ لا) + سہ/(۱ + سہ لا)) چونکہ سہ صہ = ۱ ہے تو معلوم ہوا

کہ لا$^{ن-۱}$ کا سر یعنی ع$_ن$ یعنی −½ (صہ^ن + سہ^ن) (−۱)$^{ن-۱}$ ہے یعنے

½ [(−سہ)^ن + (−صہ)^ن] یعنے ½ [(۱ + √۲)^ن + (۱ − √۲)^ن] ہے

اور اسیطرح لا$^{ن-۱}$ کا سر قن ہے صورت مفصلہ $\dfrac{ق_۱ + (ق_۲ - ۲ ق_۱) لا}{۱ - ۲ لا - لا^2}$ مین

یعنے $\dfrac{۱}{۱ - ۲ لا - لا^2}$ مین یعنی $\dfrac{۱}{(لا - سہ)(لا - صہ)}$ یعنے $\dfrac{۱}{صہ - سہ}\left(\dfrac{۱}{لا - سہ} - \dfrac{۱}{لا - صہ}\right)$

یعنی $\dfrac{۱}{صہ - سہ}\left(\dfrac{صہ}{۱ + صہ لا} - \dfrac{سہ}{۱ + سہ لا}\right)$ پس ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ قن = $\dfrac{(-۱)^ن}{سہ - صہ}$ (صہ^ن − سہ^ن)

= ۱/سہ صہ [(صہ)^ن − (−سہ)^ن] = ۱/(√ک (۱+ک)) [سہ + ... + ۱]^ن = (سہ ... + ۱)^ن

(۲۷۵) فرض کرو کہ (۱+۷لا−لا۲)/((۱−۱۰لا)^۲ (۱+۳لا)) = ط/(۱−۱۰لا) + (ص لا+س)/(۱+۳لا)^۲ تو

۱+۷لا−لا۲ = ط(۱+۳لا)^۲ + (ص لا+س)(۱−۱۰لا)

چونکہ یہہ مساوات متطابقہ ہے اسلئے لا کی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہے فرض کرو کہ لا = ۱/۱۰ تو

۱+۷/۱۰−۱/۱۰۰ = ۱۶۹/۱۰۰ ط پس ط = ۱ اسیواسطی

۱+۷لا−لا۲−(۱+۳لا)^۲ = (ص لا+س)(۱−۱۰لا)

یعنے لا(۱−۱۰لا) = (ص لا+س)(۱−۱۰لا) اسیواسطی لا = ص لا+س اسیواسطی ص = ۱

اور س = ۰ پس (۱+۷لا−لا۲)/((۱−۱۰لا)^۲(۱+۳لا)) = ۱/(۱−۱۰لا) + لا/(۱+۳لا)^۲ = (۱−۱۰لا)^-۱ + لا(۱+۳لا)^-۲

لا^ن کا سر صورت مفصلہ مین ۱۰^ن + ن(−۳)^(ن−۱) ہے

(۲۷۶) فرض کرو کہ ۱۸ = ۴ع + ق اور ۸۰ = ۱۸ع + ۴ق اسسے یہہ معلوم ہوتا ہے کہ

ع = ۴ اور ق = ۲ اور یہہ قیمتین ۳۵۶ = ۸۰ع + ۱۸ق کی تصدیق کرتے ہین مان لو

کہ ۸ = ۳ع + ۲ق + ر اور ۱۳ = ۸ع + ۳ق + ۲ر اور ۳۰ = ۱۳ع + ۸ق + ۳ر

اسسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۰ اور ق = ۳ اور ر = ۲ اور ۵۵ = ۳۰ع + ۱۳ق + ۸ر

کی تصدیق ہوتے ہے

(۲۷۷) اول اگر م = ۱ تو غیر مساوات بنجاتی ہے - دوم اگر م = ۲ تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(ن−۱)(ا۲ + ب۲ + ج۲ + ... + ک۲) بڑا ۲(اب + اج + ... + ب ج + ...) سے ہے

اور یہہ مطابق ۱۵ باب ۲۰ مثال سے ہے سوم اگر م = ۳ تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

(ن−۱)(ن−۲)(ا۳ + ب۳ + ج۳ + ... + ک۳) بڑا ۲×۳(اب ج + اب د + ... + ب ج د + ...) سے ہے

بائین طرف کا رکن = ۲(اط + ب ص + ج س + ...) اسمین ط اوس حاصلضرب کو تعبیر کرتا ہے

جسمین سوا ا کے سب حرفون مین سے دو دو کو ضرب دیا ہے اور ص اوس حاصلضرب کو بتاتا ہے

جسمین سوا ب کے سب حرفون مین سے دو دو کو ضرب دیا ہے اور علی ہذالقیاس مثلاً ا ب ج تینون

۱ط اور ب ص اور ح س مین واقع ہوگا یعنی وہ تین دفعہ کل مین آئیگا اب بموجب فرض دوم کے
ہم جانتے ہین کہ ۲ط سواے حرف ا کی تمام حرفون کے مجذورون کی مجموعہ کی (ن-۲) گنے سے
چہوٹا ہے پس اگر ہم تمام حرفون کے مربعون کے مجموعہ کو مح۲ سے تعبیر کرین تو ۲ط چہوٹا مح۲-ا۲ سے ہے
اور اسی طرح ۲ص چہوٹا مح۲-ب۲ سے اور ۲س چہوٹا مح۲-ح۲ اور علے ہذا القیاس
پس بائین طرف کا رکن چہوٹا (ن-۲)[ا(مح۲-ا۲)+ب(مح۲-ب۲)+ح(مح۲-ح۲)+...] سے ہے
یعنی بائین طرف کا رکن چہوٹا (ن-۲)[مح۱ مح۲-مح۳] سی ہے اسمین ا+ب+ح+...کو مح۱
اور ا۳+ب۳+ح۳+...کو مح۳ تعبیر کرتا ہے اور مح۱ مح۲ چہوٹا ن مح۳ سے
بموجب مثال ۲۴۷ کی ہے اسیواسطی بائین طرف کا رکن چہوٹا بہ نسبت (ن-۱)(ن-۲) مح۳ کی ہے
چہارم فرض کرو کہ م=۴ یہہ صورت اوسیطرح فرض سوم اور ۲۴۷ مثال کی اعانت سی ثابت
ہوسکتی ہے جسطرح صورت فرض دوم اور ۲۴۷ مثال کی مدد سے ثابت ہوئی تہی

(۲۷۸) بموجب مسئلہ فرمیٹ کی ا^ن-۱ - ا ضعاف ن کا ہے اب کیا تو دیا ا^ن-۱ - ا جفت
عدد ہونا چاہئے پس وہ دو کا ضعاف ہے اسے معلوم ہوا کہ ا ۲ کے برابر نہو تو یہہ
ثابت کرتا ہے کہ ا(ا^ن-۱ - ۱) ضعاف ۲ن کا ہے یعنے ا^ن - ا ضعاف ۲ن کا ہے
اسیواسطے ا^ن اور ا جب موافق قسطاس ۲ن کے یہان لیجائین گے تو اونکے اول
ایک ہی ہندسہ ہوگا

(۲۷۹) واقعہ کی مشاہدہ سی پہلے سکون کی نسبت چار فرض ہوسکتے جنکا احتمال وقوع برابر ہے
(۱) ۵ شلنگ (۲) ۴ شلنگ ۱ سون (۳) ۳ شلنگ ۲ سورن (۴) ۲ شلنگ ۳ سورن
اب واقعہ کے مشاہدہ کا احتمال ان فرضون کے موافق ا و ۶/۱۰ و ۳/۱۰ و ۱/۱۰ ہے بعد واقعہ کے
مشاہدہ کے فرضون کے احتمال ۱۰/۲۰ و ۶/۲۰ و ۳/۲۰ و ۱/۲۰ ہین اب بموجب فرض اول کے
تین روپے تہیلی مین باقی ہونگے پس قیمت سکون کی جو نکلیگی ۲ روپیہ ہوگی دوسرے
فرض کے بموجب تہیلی مین ۲ روپے اور ایک اشرفی ہوگی سلئے قیمت سکون کی جو نکلیگی (۲+۲×۱)/۳ شلنگ ہوگی

یعنی ۴۴/۳ شلنگ اور بموجب تیسرے قرض کے تہیلی مین ایک شلنگ اور ۲ سورن باقی رہینگی اسلئے سکے جو نکلینگے اونکی قیمت (۲۱×۲ + ۲۰×۲)/۳ شلنگ یعنی ۸۲/۳ شلنگ ہونگے اب بموجب آخر قرض کے تہیلی مین تین سورن ہونگین اسلئے سکی جو نکلینگے اونکی قیمت ۳/۴ شلنگ ہوگی

پس کل قیمت جو سکے نکلینگے ۱/۲ × ۲ + ۴۴/۳ × ۴/۲۰ + ۳۳/۲۰ × ۴۲/۳ + ۱/۴ × ۴۰

یعنی ۱/۱۰ [۱۰ + ۴۴ + ۴۱ + ۲۰] یعنی ۱۱۵/۱۰ یعنے ۱۱ ۱/۲ ہے

(۲۸۰) ۲۴۶ مثال مین ہم ثابت کرسکتے ہین کہ

۱/م (۱ + لا)^ن − ن/(م(م+۱)) (۱ + لا)^(ن−۱) + ن(ن−۱)/(م(م+۱)(م+۲)) (۱ + لا)^(ن−۲) . . .

= ۱/(م+ن) + ن لا/(م+ن−۱) + ن(ن−۱)/(۲×۱) لا۲/(م+ن−۲) + ...

لا کی علامت بدلو اور تفریق کرو تو نتیجہ مطلوب حاصل ہوجائیگا

(۲۸۱) فرضکرو کہ (لا۲ − ۲ لا − ۳)/(لا۲ + ۲ لا + ۱) = ی تو لا۲ − ۲ لا − ۳ = ی (۲ لا۲ + ۲ لا + ۱)

اسیواسطی لا۲ (۲ی − ۱) + ۲ لا (ی + ۱) + ی + ۳ = ۰ اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنیسے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ لا = (−(ی + ۱) ± √(−(ی + ۴)(ی − ۱)))/(۲ی − ۱) اسلئے ثابت ہوا کہ ی ۱ اور −۴ کے درمیان ی کا ہونا چاہیئے تا کہ لا اصلی قیمت رکھے

(۲۸۲) اول مساوات کا مجذور کرو تو لا + ی = ا − ۲ (لا ی)^(۱/۲) پہر مجذور کرو تو لا۲ + ی۲ = ا۲ − ۴ (لا ی)^(۱/۲) + ۲ لا ی اب دوسری مساوات انتقال رقام کرکے مجذور کرو تو لا۲ + ی۲ = ب۲ − ۲ب (۲ ی^(۱/۲)) + ۲ لا ی نسبی اول نتیجہ کو کام مین لائین تو یہہ حاصل ہوگا کہ ا۲ − ۴ا (لا ی)^(۱/۲) + ۲ لا ی = ب۲ − ۲ب (۲ لا ی)^(۱/۲) + ۲ لا ی اسیواسطی

(لا ی)^(۱/۲) = (ا۲ − ب۲)/(۴ا − ۲ب √۲) اول مساوات کو مجذور کرو اور آخر مساوات کی چہ چند کو تفریق کرو تو (لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲))^۲ = ا − ۴ (ا۲ − ب۲)/(۴ا − ۲ب √۲) = (۲ب۲ − اب √۲)/(۲ا − ب √۲)

چونکہ لا^(۱/۲) + ی^(۱/۲) اور لا^(۱/۲) − ی^(۱/۲) اسیطرح ہم کو معلوم ہوگئی تو ہم لا اور ی کو آسانی سے دریافت کرسکتے ہین

اسی معلوم ہوا کہ $لا^{ن-۱}$ کا سر $= \frac{ب}{ر-ر}(ر^{ن} - ر^{ن})$ اور $لا^{ن}$ کا سر =

$\frac{۱}{ر-ر}\left[ر^{ن+۱}(۱-ر) - ر^{ن+۱}(۱-ر)\right] = \frac{۱}{ر-ر}\left[ر^{ن+۱} - ر^{ن+۱} - ر^{ن} + ر^{ن}\right]$

مثلاً اسر $= ع_{۲ن}$ اور دوسرا $= ع_{۲ن+۱}$ بموجب مثال ۲۸۳ کے اور سلسلہ کا معلوم ہو گا کہ

$\frac{۱ + (اب+۱)لا - لا^{۲}}{۱ - (اب+۱)لا + لا^{۲}} = \frac{۱}{ر-ر}\left[\frac{ار + (ر-۱) ر لا}{۱ - ر لا^{۲}} - \frac{ار + (ر-۱) ر لا}{۱ - ر لا^{۲}}\right]$

اسی معلوم ہوا کہ $لا^{۲ن-۲}$ کا سر $= \frac{۱}{ر-ر}(ر^{ن} - ر^{ن})$ اور $لا^{۲ن-۱}$ کا سر

$= \frac{۱}{ر-ر}\left[ر^{ن}(ر-۱) - ر^{ن}(ر-۱)\right]$ پہلا سر $= ق_{۲ن-۱}$ اور دوسرا سر $= ق_{۲ن}$ بموجب ۲۸۳

(۲۸۵) فرض کرو کہ دو رقمی عدد کی دہائی کے مرتبہ پر لا کا ہندسہ ہے اور اکائی کے مرتبہ پر ی ہے تو دوسرا عدد $۱۰ لا + ی$ ہوگا اور اول عدد $= لا ی$ اور نیز وہ $= ۲(۱۰ لا + ی) - ۱۰۰$

اسی واسطے $لا ی = ۲(۱۰ لا + ی) - ۱۰۰$ پس $لا(۲۰ - ی) = ۱۰۰ - ۲ی$

اسی واسطے $لا = \frac{۱۰۰ - ۲ی}{۲۰ - ی} = ۲ + \frac{۶۰}{۲۰ - ی}$ اسی واسطے $۲۰ - ی$ عاد ۶۰ کا ہونا چاہیے اور لا اور ی میں سے کوئی ۹ سے بڑا نہیں ہو سکتا ہے پس اس سے معلوم ہوا کہ جو حل اس سوال سے متعلق ہو سکتا ہے وہ $۲۰ - ی = ۱۲$ ہے پس $ی = ۸$ اور $لا = ۷$ تو اعداد ۵۶ اور ۷۸ ہوئے

(۲۸۶) فرض کرو کہ ہر برس کے آخر میں ایک آدمی کی زندہ رہنے کا احتمال لا سے تعبیر ہوتا ہے تو اس امر کا احتمال کہ م آدمی عمر معلوم کے ہر برس کے آخر تک زندہ رہینگے $لا^{م}$ ہوگا پس اگر ب زر سالیانہ ہو تو $ل_{م} = ب\left(\frac{لا^{م}}{ط} + \frac{لا^{۲م}}{ط^{۲}} + \frac{لا^{۳م}}{ط^{۳}} + \ldots\right)$ رسالوں کی آخر تک میں ایک شخص کے مرجانے کا احتمال $۱ - لا^{ر}$ ہے اسی واسطے اس امر کا احتمال کہ ن آدمیوں میں سے ایک شخص بھی زندہ نہ رہیگا $(۱ - لا^{ر})^{ن}$ ہے اسی واسطے احتمال اس امر کا کہ وہ سب مر جائینگے $۱ - (۱ - لا^{ر})^{ن}$ ہے اسی واسطے زر سالیانہ کی قیمت جو ان میں سے ایک ہی زندہ رہنے تک جاری رہے گا

$ب\left[\frac{۱ - (۱ - لا)^{ن}}{ط} + \frac{۱ - (۱ - لا^{۲})^{ن}}{ط^{۲}} + \frac{۱ - (۱ - لا^{۳})^{ن}}{ط^{۳}} + \ldots\right]$ ہے

اب جملہ ثنائی کو پھیلاؤ تو ہم کو ایک رقام کا مجمع معلوم ہوگا جسکی رقم عام یہہ ہوگی کہ

$$(-1)^{ر} ب \frac{ن(ن-1)\cdots(ن-ر+1)}{\lfloor ر} \left[\frac{لا^{ر}}{ط} + \frac{لا^{ر}}{2ط} + \frac{لا^{ر}}{3ط} + \cdots \right]$$

اوپر جو ثابت ہوا ہے اوسسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(-1)^{ر} \frac{ن(ن-1)\cdots(ن-ر+1)}{\lfloor ر}$$

(۲۸۷) اگر لا اور ء اور ی آپسمین برابر ہون تو تمام جملہ فنا ہوجاتا ہے۔ اگر دو حد اوسمین برابر ہون تو ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ جملہ مثبت ہے اگر وہ سب غیر مساوی ہین تو فرض کرو کہ ء موافق نسبت جبریہ کے درمیان لا اور ی کے واقع ہے اور ب = (ا + ح)‏ ‏ ‏ا - لر پس لر ضرور مثبت ہوگا
اب ب کی قیمت مندرج کرو تو جملہ کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

[ا (ء - لا) + ح (ء - ی)]‏ ‏ا - لر (ء - لا) (ء - ی) اور یہہ مثبت ہے کیونکہ ء - لا اور ء - ی کی مختلف علامتین ہین

(۲۸۸) ہر ایک عدد کی صورت ان تین صورتون ۵ ن اور ۵ ن ± ۱ اور ۵ ن ± ۲ مین سے ایک نہ ایک ہوگی اب مجذور ۵ ن کا ۲۵ ن‏ ہے اور ۵ ن ± ۱ کا مجذور ۵ ع + ۱ کی صورت کا ہے اور ۵ ن ± ۲ کا مجذور ۵ ق + ۴ کی صورت یعنی ۵ (ق + ۱) - ۱ کی صورت کا پس اسی معلوم ہوا کہ ہر مجذور ۵ م اور ۵ م + ۱ اور ۵ م - ۱ کی صورتون مین سے کسی نہ کسی صورت کا ہوگا

ن‏ - ن = ن (ن‏ - ۱) = ن (ن - ۱) (ن + ۱) (ن‏ + ۱) اور حاصل ضرب (ن - ۱) ن (ن + ۱) پورا تقسیم ۳ پر ہوتا ہے اگر ن - ۱ اور ن اور ن + ۱ مین سے کوئی بھی ۵ پر تقسیم نہ ہوگا تو ن کی صورت ۵ م + ۲ کی یا ۵ م - ۲ کی ہوگی تو ن‏ + ۱ پورا تقسیم ۵ پر ہوگا اگر ن طاق ہو تو ن + ۱ اور ن - ۱ اور ن‏ + ۱ سب جفت ہونگے اور ن - ۱ یا ن + ۱ پورا ۴ پر تقسیم ہوگا پس (ن - ۱) (ن + ۱) (ن‏ + ۱) پورا ۲ × ۲ × ۴ یعنی ۱۶ پر تقسیم ہوتا ہے اسی ثابت ہوا کہ ن (ن - ۱) (ن + ۱) (ن‏ + ۱) پورا تقسیم ۱۶ × ۳ × ۵ یعنی ۲۴۰ پر ہوتا ہے

(۲۸۹) واقعہ کے مشاہدہ سے پہلے ن فرض ہین جنکا احتمال وقوع برابر ہے یعنی تمام کو لیا ہوا

تمام گولیون مین ایک سیاہ ہو۔ تمام گولیون مین دو سیاہ ہون اور علیٰ ہذا القیاس بموجب ن فرضون کے واقعہ جو مشاہدہ مین آئیگا اونکا احتمال علیحدہ علیحدہ یہہ ہے کہ

1 و $\left(\frac{ن-1}{ن}\right)^2$ اور $\left(\frac{ن-2}{ن}\right)^2$ و ... $\left(\frac{1}{ن}\right)^2$

اور بعد مشاہدہ واقعہ کے احتمالات بموجب ان فرضون کے یہہ ہے

$\frac{ن^2}{ص}$ و $\frac{(ن-1)^2}{ص}$ و $\frac{(ن-2)^2}{ص}$ ... $\frac{1^2}{ص}$ اسمین ص بجاے

$ن^2 + (ن-1)^2 + (ن-2)^2 + \dots + 1^2$ یعنی بجای $\frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$ کے ہے

پس احتمال کہ تیسری دفعہ بہی سیاہ گولی نکلیگی

$\frac{ن^2}{ص}\times 1 + \frac{(ن-1)^2}{ص}\times\frac{ن-1}{ن} + \frac{(ن-2)^2}{ص}\times\frac{ن-2}{ن} + \dots + \frac{1^2}{ص}\times\frac{1}{ن}$ یعنی

$\frac{1}{ن ص}\left[ن^3 + (ن-1)^3 + (ن-2)^3 + \dots + 1^3\right]$ یعنی $\frac{1}{ن ص}\left[\frac{ن(ن+1)}{2}\right]^2$ یعنی $\frac{3ن^2+3ن}{4ن+2}$ ہے

(۲۹۰) $لا = \frac{1}{ن}$ کے رکھو تو $\frac{ن^ع}{ی^ن}$ حاصل ہوگا اب موجب دفعہ ۲۴۵ کے

$ی^ن = 1 + (لوک\ ی)ن + \frac{(لوک\ ی)^2 ن^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{(لوک\ ی)^ر ن^ر}{\underline{ر}} + \dots$

یہہ ظاہر ہے کہ ن کو کما ینبغی بڑا فرض کرنے سے ہم $ی^ن$ کو اتنا بڑا کر سکتے ہین کہ وہ $ن^ع$ کی اضعاف معینہ سے بڑا ہو اور حقیقت مین اگر ر بڑا ع سے تو فقط رقم واحد $\frac{(لوک\ ی)^ر ن^ر}{\underline{ر}}$ بڑی $ن^ع$ کی اضعاف معینہ سے ہو سکتی ہے پس $\frac{ن^ع}{ی^ن}$ غیر متناہی چہوٹی ہے جب ن غیر متناہی بڑا ہو

(۲۹۱) ہمکو معلوم ہے کہ $لا = \frac{2\ لا^3}{1+لا^3}$ اسیواسطی $1+لا^3 = 2\ لا^2$ اسیواسطے $1 - لا^2 - لا^2(1-لا) = 0$ اسکو $1-لا$ پر تقسیم کرو تو $1 + لا - لا^2 = 0$ اور اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سے $لا = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ حاصل ہوگا اور $ی = \frac{2\ ی^2}{1+ی^3}$ اسیواسطی $1 + ی^3 = 2ی$ اسیواسطے $1 - ی - ی(1-ی^2) = 0$ اسکو $1-ی$ پر تقسیم کرو تو $1 - ی(1+ی) = 0$ اس مساوات درجہ دوم کے حل کرنے سی $ی = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ حاصل ہوگا

چونکہ $لا + ی$ صفر نہین ہے تو اسواسطی لا اور ی دونو مین اوپر کی علامت یا دونو مین نیچے کی علامت لینی چاہیے اس سے معلوم ہوا کہ

$ی = \frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اور $ی = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اسلا $= \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ اور $لا = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

پس یہہ چاروں رقمیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور مجموعہ انکا $\pm ۲\sqrt{۵}$ ہے اور یہہ بھی دریافت ہوگا کہ $لا^۲ + ی^۲$ بھی $\pm ۲\sqrt{۵}$ ہے۔

(۲۹۲) دفعہ ۳۴۷ کی طرح عمل کرو کہ

$$ص = ۱^۲ ر + ۳^۲ ر^۲ + ۵^۲ ر^۳ + \cdots + (۲ن - ۱)^۲ ر^ن$$ تو

$$ص ر = \quad ۱^۲ ر^۲ + ۳^۲ ر^۳ + \cdots + (۲ن - ۳)^۲ ر^ن + (۲ن - ۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

اسواسطے تفریق کرنے سے

$$ص(۱ - ر) = ر + ۸ر\left[ر + ۲ر^۲ + ۳ر^۳ + \cdots + (ن - ۱)ر^{ن-۱}\right] - (۲ن - ۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

پس بموجب مثال ۱۸ باب ۳۱ ہمکو یہہ حاصل ہے کہ $ص(۱ - ر)$

$$= ر + ۸ر\left[\frac{ر - (ن - ۱)ر^ن}{۱ - ر} + \frac{ر^۲(۱ - ر^{ن-۲})}{(۱ - ر)^۲}\right] - (۲ن - ۱)^۲ ر^{ن+۱}$$

اسکی تحویل ہوکر یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{(۱ - ر)^۳}\left[ر(۱ + ۶ر + ر^۲) - \left[(۲ن - ۱)(۱ - ر) + ۲\right]^۲ ر^{ن+۱} - ۴ر^{ن+۲}\right]$$

(۲۹۳) یہاں $\frac{س_{ن+۱}}{س_ن} = \left(\frac{۲ن + ۱}{۲ن - ۱}\right)^۲ ر = \left(۱ + \frac{۲}{۲ن - ۱}\right)^۲ ر$ ہم اسکو ن کو کتنا ہی بڑا فرض کرکے جتنا چاہیں ر کے قریب لا سکتے ہیں پس اگر ر چھوٹا واحد سے ہے تو بموجب دفعہ ۵۵۹ وہ انضمامی ہے اب اگر ن غیر متناہی زیادہ ہو تو $ر^{ن+۲}$ غیر متناہی چھوٹا ہوگا اور ایسا ہی $\left[(۲ن - ۱)(۱ - ر) + ۲\right]^۲ ر^{ن+۱}$ چھوٹا ہوگا (مثال ۲۹ دیکھو) پس سلسلہ غیر متناہی کا اوسکا حاصل جمع $\frac{ر(۱ + ۶ر + ر^۲)}{(۱ - ر)^۳}$ ہے

(۲۹۴) $\sqrt{۷}$ کو کسر متسلسل میں تحویل کرو تو خارج قسمت ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۴ و ۱ و ۱ و ۱ و ۴ ... ہونگے ہم سے پہلے جو دو منقربے ہیں وہ $\frac{۸}{۳}$ اور $\frac{۱۲۷}{۴۸}$ ہیں پس لا = ۸ اور ی = ۳ ایک حل ہے اور لا = ۱۲۷ اور ی = ۴۸ دوسرا

(۲۹۵) چونکہ اول خارج قسمت ۵ ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ع = ۲۵ + لا جس میں لا کیا ایا ہے

اور چونکہ دوسرا خارج قسمت بھی ۵ ہے تو معلوم ہوا کہ √ع چھوٹا ۵ + ۱/۵ سے ہے

اسواسطے ع چھوٹا ۲۷ + ۱/۲۵ سے ہے پس √(۲۵+لا) = ۵ + √(۲۵+لا) − ۵

= ۵ + لا / (۵ + √(۲۵+لا)) پس (۵ + √(۲۵+لا)) / لا = ۵ + ایک کسر واجب جب فرض کے

پس اگر لا کی قیمتیں متواتر ۱ و ۲ رکھیں تو یہہ دریافت ہوگا کہ سب سے بڑی صحیح (۵ + √(۲۵+لا)) / لا

میں ۱۰ اور ۵ ہیں پس قیمت لا = ۲ مساوات میں دخل رکھتی ہے اور ع = ۲۷

(۲۹۶) ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ اگر لا مثبت ہو تو (لا³ + ۲ ا³) / لا بڑی (۳ ا²) سے ہوگی

اب یہہ دریافت ہوگا کہ (لا³ + ۲ ا³) / لا − ۳ ا² = (لا − ا)² (لا + ۲ ا) / لا یہہ ضرور مثبت ہوگا

اسسے دعوےٰ ثابت ہے

(۲۹۷) فرض کرو کہ و میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جہاز چلتا ہے تو ۲۰۰۰/و گھنٹہ میں مسافت طے ہوگی اور ایک گھنٹہ میں جو کوئلہ جلتا ہے وہ ط و³ ہے جسمیں ط کوئی متصل مقدار معینہ ہے

لیکن و = ۵ تو مقدار اوسکی ۵ء۱ ٹن ہوتی ہے اسواسطے ط (۱۵)³ = ۱۷۵

پس ط = ۱/۲۲۵۰ پس و³/۲۲۵۰ ٹن کوئلہ فی گھنٹہ خرچ ہوتا ہے اور اسکی قیمت ۱۸ و³/۲۲۵۰ شلنگ ہے اسواسطے کل قیمت سفر معلوم میں ۲۰۰۰/و (۱۸ و³/۲۲۵۰ + ۱۶) شلنگ ہے

یعنی ۱۶ (و² + ۲۰۰۰/و) بموجب مثال ۲۹۶ کے اسلئے کم سے کم قیمت جب ہے کہ و³ = ۱۰۰۰

جب و = ۱۰ اور قیمت ۴۸۰۰ شلنگ

(۲۹۸) چونکہ عدد طاق ہے اور اوسکی دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہے تو اوسکی صورت ۲۰ ع + ق کی سی ہوگی جسمیں ع کوئی صحیح ہے اور ق بجائے ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ کی ہے اب اگر اسکا ن قوت کا صعود لیں تو قن + ۱ ضعف ۲۰ حاصل ہوگا پس اسسے معلوم ہوا کہ اسکے اندر دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہوگا بشرطیکہ قن کی دہائی کے مرتبہ پر ہندسہ جفت ہو اور یہہ معلوم ہے کہ ہندسہ جفت ہے مثال ۲۱۸ دیکھو

(۲۹۹) (لا + لا² + لا³)² کی صورت مفصلہ میں جو لا کی جفت قوتوں کی امثال ہیں اونکا مجموعہ اون صورتوں کی تعداد بتلاتا ہے جسمیں نکالے گئے اعداد کا مجموعہ جفت ہے اور اسی قبیل کا

لا کے طاق قوا ء کے واسطے بہی صحیح ہے اب

(لا + لا۲ + لا۳)۴ = (لا + لا۲)۴ + ۴ لا۳ (لا + لا۲)۳ + ۶ لا۶ (لا + لا۲)۲ + ۴ لا۹ (لا + لا۲) + لا۱۲

پس جفت امثال کا مجموعہ (۱ + ۱)۴ + ۶ (۱ + ۱)۲ + ۱ یعنے ۴۱ ہے اور طاق امثال کا مجموعہ

۴ (۱ + ۱)۳ + ۴ (۱ + ۱) یعنے ۴۰ ہے

(۳۰۰) یہہ استقراء سے ثابت ہو سکتا ہی ہم آسانی سے دعویٰ ثابت کر سکتے ہین جب ن = ۱ یا جب ن = ۲ فرض کرو کہ عن/قن قیمت کسر مسلسل کی اوس صورت مین ہے جب ا ون ارکان اجزاء ترکیبی کام مین لائے جائین تو بموجب فعرہ ۱۸ کے ہم کو حاصل ہے کہ

عن+۱/قن+۱ = (عن + ن/(ن+۱) عن-۱)/(قن + ن/(ن+۱) قن-۱) اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ہم ہمیشہ

قن = ن + ۱ اور عن = (ن + ۱) صن لے لیتے ہین اسمین صن سے

۱/(۱×۲) − ۱/(۲×۳) + ۱/(۳×۴) − ... + (−۱)ن+۱/(ن(ن+۱)) کو تعبیر کرتے ہین اور فرض کرلو کہ

یہہ ارتباطات عن اور قن تک مستحکم ہین تو

عن+۱/قن+۱ = (۲صن + ن صن-۱)/(ن + ۲) = (۲صن + ن [صن − (−۱)ن+۱/(ن(ن+۱))])/(ن + ۲)

= صن + (−۱)ن+۲/((ن+۱)(ن+۲)) = صن+۱

اسی ہم یہہ معتبر کرتے ہین کہ عن+۱ = (ن+۲) صن+۱ اور قن+۱ = ن + ۲ پس اس سے معلوم ہوا کہ جو ارتباطات عن اور قن تک مستحکم ہین وہ ن کو ن+۱ میں بدلنے سے بہی درست رہتے ہین پس اونکا استحکام علی العموم ثابت ہوا اور

ص = ۱ − ۱/۲ − (۱/۲ − ۱/۳) + ۱/۳ − ۱/۴ − (۱/۴ − ۱/۵) + ...

= ۱ + ۲ {۱ − ۱/۲ + ۱/۳ − ۱/۴ + ...}

پس جب ان غیر متناہی ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ص = ۲ لوگ ۲ − ۱

تمت